

Matematisk modellering för miljöarbetet

Matematik kan användas för att få syn på och diskutera samhällsfrågor och politiska beslut. Här visar författaren hur aktuella miljöfrågor kan modelleras matematiskt för att fungera som underlag för eftertanke och debatt.

Miljöfrågor och hållbar utveckling är en naturlig del av skolämnen SO, NO och flera praktisk-estetiska ämnen. På min arbetsplats (Malmö universitet) har vi spånat om hur vi kan få in detta även i matematikdidaktiken. Matematikundervisning bör behandla både rena matematiska begrepp och matematiska tillämpningar. Medan matematiska begrepp som sådana är neutrala i förhållande till miljöfrågor, så är tillämpad matematik centralt för att modellera och simulera miljökonsekvenser av olika handlingsalternativ. Det ledde mig till att formulera några matematiska modeller på temat miljö och att göra en återblick på vad läroplaner säger om modellering.

Matematisk modell i läroplanen

Begreppet matematisk modell finns med redan i Lgr69 där "Begreppet matematisk modell förklaras ...". Här är alltså en matematisk modell något som läraren *undervisar om*, till skillnad från i Lpo94 där det är något som elever ska *arbeta med* genom att "använda enkla matematiska modeller". Men vad är egentligen en matematisk modell? Freudenthals tradition talar om matematisering som att beskriva ett verkligt fenomen med matematiska symboler. Det innebär att helt vanliga samband, såsom $s = v \cdot t$, betraktas som matematiska modeller. Sedan Lgr11 ingår det i betygsriterierna för åk 9 även att kunna "formulera enkla matematiska modeller".

I en litteraturgenomgång såg Gabriele Kaiser och Bharath Sriraman att inom matematikdidaktik likställs modellering ofta med att *använda* modeller för problemlösning. Frågar man en matematiker så innefattar det även att *formulera* problemet, vilket ingår i George Pólyas första punkt om att förstå och formulera om problemet med egna ord. En frågeställning kan behöva omformuleras för att den är alltför vag och måste preciseras för att kunna besvaras eller för att den är fylld av ovidkommande detaljer som behöver sorteras bort. I elevuppgifter måste sådan vaghet väljas med omsorg så att den placerar problemet inom räckhåll för eleverna, alltså så att de måste precisera frågan men också att de klarar av att göra det. Matematikernas och matematikdidaktikernas olika definitioner hjälper oss att bli medvetna om

skillnaden mellan att använda och att formulera modeller. Eftersom lärare själva väljer hur de vill formulera uppdrag till eleverna blir förstås flera olika svar möjliga. Tabell 1 visar skillnader mellan olika didaktiska kategorier.

Tabell 1. Elevens uppdrag för fråga, metod och svar för olika didaktiska kategorier.

Didaktisk kategori	Fråga	Metod	Svar
Övningsräkning (använda modell)	given	given	ett unikt svar
Problemlösning (använda modell)	given	välj själv	ett unikt svar
Modellering (formulera modell)	formulera själv	välj själv	beror av frågan

Fyra matematiska modeller för miljöproblem

Denna artikel ger några exempel på matematisk modellering så som matematiker tolkar det. Två av dem handlar om att jämföra transportsätt avseende tid och kostnad. Syftet är att illustrera att man, genom att själv välja frågan, kan modellera samma fenomen med två olika fysikaliska enheter, vilket ger två olika perspektiv på jämförelsen. Den tredje modellen tar upp det som var aktuellt under valrörelsen, nämligen priser på el och fossila bilbränslen. Den fjärde modellen handlar om hållbar utrotning av arter och illustrerar att det med grundskolematematik och tämligen grova uppskattningar går att göra en modell av ett avancerat och ganska otäckt fenomen. Modellen uppmanar oss till eftertanke och ansvar och gör matematikläraren till en visselblåsare i samhället. Just denna artikel fokuserar modellering, men en perifer not är att digitala verktyg är användbara i modellering och att beräkningarna i just modellerna 1 och 2 med fördel görs i kalkylblad.

Modell 1: Jämföra transportsätt i tid

Ofta används tidsbesparing som ett argument för att ta bilen i stället för gå, cykla eller åka kollektivt.

Hur stor tidsbesparing ges av att gå eller åka bil jämfört med att cykla?

Vi använder ett kalkylblad enligt tabell 2 för att göra dessa beräkningar. Programmera kalkylbladet så att det beräknar de kursiverade värdena i tabellen som illustrerar ett fall där man har 2,5 km enkel resa mellan hem och skola/arbete måndag till fredag, vilket ger totalsträckan 25 km per vecka i arbetsresor. Reseplaneraren i Google anger medelhastighet för cykel till cirka 18 km/h. Även om detta är långsamt på en landsväg, så är det aningen snabbt om man måste stanna vid korsningar och trafikljus. I modellen använder vi 12 km/h – en hastighet som man i vanliga fall inte blir svettig av även om man cyklar i regnställ. Tidsskillnaden i tabell 2 beräknas jämfört med cykel.

Tabell 2 visar att restiden är drygt 1 timme kortare för bilisten än cyklisten. Eftersom bilisten sitter still lägger vi i denna modell på två gym-besök per vecka om vardera 45 minuter plus att det tar 30 minuter att byta om före och efter gymbesöket samt ta sig dit och hem, alltså 2,5 timme totalt. Sista raden i tabell 2 visar att för bilisten omvandlas den kortare restiden till en tidsförlust på drygt 1 timme per vecka för att åka bil och gå på gym jämfört med att få regelbunden vardagsmotion genom att cykla. En mer detaljerad modell skulle kunna inkludera tid för att skrapa frost från bilrutorna på

vintermorgnar och för dem med egen garageuppfart att skotta snö motsvarande en bilbredd eller endast en cykelbredd.

Tabell 2. Tidsskillnad per vecka vid olika färdssätt jämfört med cykling

Tidsskillnad	Gång	Cykel	Bil
Hastighet (km/h)	5	12	30
Sträcka (km; må-fre)	25	25	25
Restid (h)	5	2,08	0,83
Tid på gym (h)	0	0	2,5
Tidsskillnad (h)	+2,92	0	+1,25

Modell 2: Jämföra transportsätt i kronor

Ett argument för att ha bil är att man måste ha det för att ta sig till arbetet. Så är det förstås i de fall där man bor långt från kollektivtrafiken, men det finns även många som bor och arbetar i en mindre tätort och likväl tar bilen till arbetet eller EPA-traktorn till skolan.

Vad kostar det att ta sig till skola/arbete med bil jämfört med andra transportsätt?

För att besvara frågan behöver vi först fundera över vilka kostnader som finns för att transportera sig till arbete och skola. En lämplig förberedelseläxa skulle kunna vara att eleverna frågar sina föräldrar vilka olika kostnader de har för bil, cykel eller kollektivtrafik.

En rad antaganden måste nu göras och rimligheten i dem kan vara ett lämpligt diskussionsämne. I denna modell räknar vi på ett år med 47 arbetsveckor. Som värdeminskning för att promenera väljer vi ett par nya skor per år à 1000 kr. För cykel väljer vi avskrivning av nypris 10000 kr på 10 år där service tillkommer. För bilen hämtar vi uppgifter på bilsvar.se där en vanlig bil, exempelvis Volvo V40, har årskostnader för avskrivning och service enligt tabell 3. I denna modell ingår även boendeparkering 500 kr/månad i 12 månader och parkering vid arbetsplatsen för 1000 kr/mån i 12 månader samt bränsle för 5 km per dag i 235 arbetsdagar. Det är lämpligt att använda kalkylblad för beräkningarna.

Tabell 3. Kostnad per år vid olika färdssätt och 47 arbetsveckor.

Årskostnad (kr)	Kollektivtrafik	Gång	Cykel	Bil
Inköp/avskrivning	10000	1000	1000	20000
Service	0	0	1000	15000
Parkering	0	0	0	17000
Bränsle	0	0	0	1175
Gymkort	3000	0	0	3000
Totalkostnad	13000	1000	2000	56175

Precis som i modell 1 ingår ett årskort på gym för bilisten. Bilkostnaden blir förvånansvärt hög – den motsvarar två biobiljetter varje vardagskväll. Alternativt räcker besparingarna jämfört med att cykla eller gå till en ny eldriven lådcykel varje år eller årskort på länstrafiken för två vuxna personer plus kostnader för att vara med i bil-pool eller hyrbil en vecka på semestern. Notera att i detta räkneexempel används bilen endast till arbetsresor cirka 120 mil/år. Kostnaden per mil blir lägre om man slår ut den på en längre körsträcka som också inkluderar fritidskörning.

Modell 2 går bra att redovisa som linjära modeller där raderna inköp, parkering och gym räknas som fasta priser och övriga kostnader som rörliga. Tabell 4 visar att både fasta och rörliga kostnader var för sig är betydligt högre för bil än för cykel och gång.

Tabell 4. Linjär modell med rörlig kostnad utslaget per kilometer beräknat på 25 km/vecka gånger 47 arbetsveckor.

Kostnader	Kollektivtrafik	Gång	Cykel	Bil
Fast (kr)	13000	1000	1000	40000
Rörlig (kr/km)	0,00	0,00	0,85	13,77

En utmaning med att representera den linjära modellen i ett diagram är skalningen då de rörliga kostnaderna är mycket små i förhållande till de fasta. Det blir i stort sett vågräta linjer i diagrammet, även om man byter till enhet kr/mil. Argumentet "bil måste man ju ändå ha" innebär att bortse från fasta kostnader. Detta argument skulle en redovisningsekonom och en matematiker aldrig acceptera. Tabell 3 visar att bränslepriserna för bilresan till jobbet i många fall är en ganska liten del av totalkostnaderna. Den stora delen är istället de fasta kostnaderna. Därmed faller ett av argumenten för en politik som syftar till att stödja bilkörande hushåll med att ge generella rabatter på bränslekostnaderna av typen sänkt bensinskatt, vilket leder till nästa modell.



Modell 3: Skatt på fordonsbränsle

Vid valrörelsen 2022 föreslog alla riksdagspartier någon form av sänkta priser på bensin och diesel, men lite utrymme gavs till de mer övergripande konsekvenserna av ett sådant beslut.

Vad innebär en generell sänkning av skatt på fossila fordonsbränslen?

I media föreföll huvudargumentet vara att man måste ha råd att kunna ta sig till arbetet. Med statistik som grund är det rimligt att anta att en stor del av resandet inte är arbetsresor. Folk använder bilen även till fritidsresor på helger och semestrar och för att besöka vänner och butiker. Med tanke på att det är nödvändigt att snabbt minska den totala användningen av fossila bränslen låter det som ett oansvarigt förslag att sänka drivmedelsskatten generellt, alltså även för fritidsresor. Med andra ord skulle en sådan politik ekonomiskt gynna utsläpp av koldioxid. En enkel och grafisk matematisk modell för denna situation är en rektangel som vi delar i två delar; en del för arbetsresor och en annan del för övriga resor. I modellen räknar vi med att det övriga resandet utgör den större delen.

Arbetsresor	Övriga resor
Sänkt skatt på hela drivmedelskonsumtionen	

Ett alternativ till en generell skattesänkning på fossila drivmedel är att endast sänka den för arbetsresor. Men hur åstadkommer man det? Jo, det finns redan en möjlighet att i inkomstdeklarationen ansöka om avdrag för jobbresor. Därmed försvinner huvudargumentet för att generellt sänka drivmedelsskatten för att folk ska ha råd att ta sig till arbetet om det enda rimliga alternativet är en lång bilresa, vilket är fallet för en del personer.

Arbetsresor	Övriga resor
Sänkt skatt	

En annan fråga i sammanhanget är vad staten bäst ska använda skattemedlen till. En stor andel av priset på fossila drivmedel är just skatt. När bensinpriset ökar får staten ökade momsintäkter. Dessa pengar skulle kunna gå till att sänka skatten på fossilt bränsle, men de skulle också kunna användas för att sänka skatt på arbete eller för att bygga ut antalet laddstationer för elbilar så att fler bilberoende i glesbygden kan gå över till elbil.

Modell 4: Hur många djur kan vi utrota?

Ett naturligt svar på frågan är nog ”helst inga”. Egentligen är frågan fel ställd eftersom geologiska data visar att djur och växter dog ut långt innan människor hade uppfunnit pilbågen. Frågan borde i stället vara:

I vilken takt kan djur och växter tillåtas att dö ut?

Den frågan går att besvara på ett matematiskt ganska enkelt sätt genom att ett hållbart utdöende sker i samma takt som arter nybildas. Ett standardknep i matematisk modellering är att formulera detta som en ekvation som beskriver nettoförändringen:

$$\spadesuit \text{ [artnetto] = [nybildning av arter] - [utrotning av arter]}$$

Det är önskvärt att $\text{[artnetto]} = 0$, alltså att ingen förändring sker i antalet arter. Med andra ord ett tillstånd i balans. På matematiskt fackspråk kallas detta för ett stationärt tillstånd. Det är förstås nödvändigt att undersöka artnetto för en bestämd tidsperiod, exempelvis 100 eller 1000 år. Därför blir nästa steg i modelleringsprocessen att ta reda på i vilken takt som arter nybildas. Det kan man uppskatta som antalet existerande arter dividerat med tiden det tog för dem att bildas. Men hur många nu levande arter finns det? Enligt Naturhistoriska riksmuseet finns det troligen runt 10 miljoner arter av djur, svampar och växter och av dessa är runt 1,5 miljoner vetenskapligt beskrivna. För att göra uppskattningarna mer precisa kan vi avgränsa oss till en snäv grupp organismer. Exempelvis däggdjur eller fåglar då dessa är ganska väl undersökta. Man räknar med att det nu finns knappt 5000 arter däggdjur och cirka 10 000 fågelarter. Hur lång tid har det tagit för dessa att bildas?

För att besvara denna fråga läser vi i *Forskning och framsteg* att det har skett ungefär tio massutdöenden under de senaste 290 miljoner åren och att alla dessa sammanfaller med stor vulkanisk aktivitet och stora meteoritnedslag. Hit hör även det som ägde rum för runt 65 miljoner år sedan, vilket räknas till ett av de fem allra största i jordens historia. Geologerna har också noterat att de senaste 10 massutdöendena förekommer i cykler med en period på 25–30 miljoner år och man spekulerar om att solsystemets rotation runt Vintergatan kan vara orsak till kometer och kanske även seismisk aktivitet. Oavsett orsak bör därför det senaste massutdöendet ha varit för ungefär 10 miljoner år sedan. Ur detta gör vi den mycket grova uppskattningen att alla nu levande däggdjursarter har bildats de senaste 10 miljoner åren, vilket ger en takt i nybildning av arter på ungefär en däggdjursart per 2000 år och en fågelart per 1000 år.

För att beräkna artnetto återstår att uppskatta utrotningstakten. En läxa för eleverna inför lektionen kan vara att lyssna på några avsnitt ur programmet ”Borta för alltid” från Sveriges Radio P1. Programmet ger information som räcker för att åtminstone sätta en undre gräns för antalet utrotade däggdjur och fåglar per årtusende, vilket är nog för att avgöra om artnetto är i balans eller inte.

Metareflektioner

Det finns åtminstone två vanliga invändningar mot modell 1 och 2. Den ena är att ”pengar är inget problem – jag har tillräckligt för att både åka EPA-traktor och gå på gym”. Den andra är att ”jag är bekväm av mig”. Det finns även åtminstone två invändningar mot modell 4. Den ena är att den visserligen redovisar en mycket allvarlig situation, men utan att redovisa hur den ska lösas. Den andra är att sådana modeller anses kunna skapa trauma hos barn. Sådana trauman kan leda till handlingsförlamning, vilket vi inte är betjänta av. Alla dessa fyra invändningar är värda att ta på allvar. En möjlig tolkning av dem är att det nog inte är lämpligt att undervisa om handlingsalternativ (modellerna 1 och 2) och problem (modell 4) som fristående lektioner. Ett alternativ är att först presentera ett handlingsalternativ och att i nära anslutning till detta presentera ett problem som visserligen är mycket allvarligt, men som delvis kan lösas genom de tidigare presenterade handlingsalternativen.

Modellerna 1 och 2 visar att man kan formulera enkla matematiska modeller som kan jämföras för att ge olika perspektiv. Om dessa olika perspektiv ger samma slutsats är det rimligt att betrakta modellerna som användbara. Medan modellerna 1 och 2 betonar bilens fasta kostnader betonar modell 3 dess rörliga kostnader. Modell 3 lyfter fram att vi ibland verkar glömma att en lösning redan finns och om vi glömmer det kan fokus hamna snett, nämligen att gynna fossilbränsleanvändning i allmänhet snarare än arbetsresor specifikt. Modell 4 visar att man med ganska enkla metoder kan undersöka komplexa påståenden och skaffa sig beslutsunderlag.

Moraliska pekpinnar

Alla fyra modellerna innehåller en moralisk pekpinne relaterat till vilka beslutsunderlag de modellerar. Frågorna är samhällskritiska och antyder med ord ur pjäsen Hamlet av Shakespeare ”... att någonting är ruttet här i staten ...”. Både Hamlet och profeterna i Bibelns gamla testamente liksom nutida visselblåsare påminner oss om att det inte alltid är vare sig populärt eller riskfritt att vara samhällskritisk. Frågan kan ställas om det är relevant att ta upp miljöfrågor i matematikundervisningen. Ett argument för att även matematiken bör ta upp sådana frågor är att priset för att rädda miljön mycket väl kan vara en bättre privatekonomi, mer fritid och bättre hälsa. En bättre folkhälsa frigör i sin tur skattepengar från vårdkostnader för vällevnadssjukdomar till andra saker. En enkel beteendeförändring som styrks av modell 1 och 2 främjar också planetens hälsa. Det låter som en verkligt god affär där alla är vinnare utom lättjan och möjligen fåfängen!



LITTERATUR

- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education*. ZDM 38(3), 302–310.
- Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Vol. 85. Princeton university press.
- Nyström, J. (2021). *Massutdöende sker i cykler*. Forskning och framsteg 2021(2).