Lärartankar

med Russell Hatami

Slow motion

Att göra matematik betyder mycket mer än att skriva en lösning på ett matematiskt problem – det innebär att tänka djupt på matematik, kämpa med matematik, kommunicera om matematik, öva på matematiska färdigheter och försöka komma på nya matematiska idéer. Så skriver Katarine Adamyk som kommentar till Paul Halmos citat:

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

Paul Halmos

Det är oändligt stort skillnad mellan den skada som orsakas av en elefant och en myra när de faller till marken från en hög höjd. Att koppla matematiken till intelligens och bortse från det otroligt omfattande arbete som matematiklärandet är, det är som när en elefants fall liknas vid en myras fall!

Man kan förstå att matematiklärare vill minska på den mekaniska räkningen i skolan. Men under lång tid har man haft alltför höga och orealistiska förväntningar på att eleverna själva, eller genom samtal med varandra, ska skaffa sig kunskap och förståelse. Somliga förordar till och med att eleverna själva ska skapa egna övningsuppgifter och egna matematikproblem. Men reflektera över detta: vilka forskningsresultat eller beprövade erfarenheter underbygger dessa påståenden? *Hur många matematiklärare skapar egna övningsuppgifter för sin undervisning?*

Är det verkligen rätt att låta barn och ungdomar på egen hand finna samband och kunskap om det som tagit mänskligheten lång tid att upptäcka? Är detta inte ett utbildningssjälvmord – speciellt i ett samhälle där alla ska klara skolan? Skolan i allmänhet och matematikämnet i synnerhet riskerar med en sådan inställning att bli en plåga för många barn och ungdomar. Speciellt för de många barn som tillhör familjer utan utbildningstradition.

Tålamodsprövande arbete

Att skapa möjligheter för studenter och elever att förstå matematiska teorier är i sig en svår och krävande utmaning, både för mig som lärare och för dem. Det krävs mycket arbete som ibland är tålamodsprövande. När jag sedan upplever att de kommit fram till förståelse så kompenserar emellertid känslan av tillfredsställelse mer än väl de besvärliga och ibland tråkiga delarna av arbetet. Då behöver jag inte längre motivera studiet av matematik med att säga att ”matematik är roligt” eller ”matematik är viktigt”. Att motivera elever till skapande och kreativ verksamhet som fordrar både fantasi och tålamod är en viktig och utmanande uppgift för matematikläraren.

Jag brukade ofta visa mina egna lösningar för elever och studenter, före själva undervisningen, speciellt vid intensiva universitetskurser som en- eller flervariabelanalys och linjär algebra. Mina lösningar kunde innehålla långa tråkiga räkningar i kladdform innan jag till slut kom fram till en för studenterna förståelig lösning. Jag brukade säga till mina studenter att jag har studerat dessa kurser själv och varit en av de bästa studenterna. Jag fick under min studietid arbeta på högskolan som amanuens i rena matematikkurser, och jag har undervisat i många år på högskolor. Men ändå, när det kommer en ny bok börjar jag med att själv lösa de uppgifter som studenterna ska lösa. Även för mig är det mycket arbetskrävande – alltså jobbigt! Men slutligen roligt! Jag upplever en underbar glädje som blir till en kraft i det mödosamma kreativa arbetet att lära sig matematik.

Tyvärr är det många av oss matematiklärare och läroboksförfattare som enbart visar slutprodukten. Den är ofta många gånger kortare än lösnings- och lärandeprocessen, eller väldigt elegant och lättförståelig för de studerande. Ju kortare och enklare lösningar, desto elegantare. En sådan lösning kopplas ofta till en större begåvning och intelligens. En väldig naiv tolkning av detta är att vi försummar arbetskraven i matematik och ersätter dem med falska krav på *intelligens* istället för *arbetsförmåga*, och det är ett av de mest dolda problemen i matematikundervisningen! Denna falska övertygelse kan liknas vid sagan om *Kejsaren nya kläde*r där barnet ropar att kejsaren är naken. Men arbetsflit och idoghet är något man kan utveckla och vi riskerar att sålla bort en stor grupp individer som mindre intelligenta. Detta anser jag är en av de största farorna för en människas matematiklärande.

En fantasieggande uppgift

Här nedan tar jag upp ett exempel vars lösning kräver mycket tid och möda, och en förmåga att använda både aritmetiska kunskaper och fantasi. Efter exemplet går jag igenom de olika stegen i en möjlig lösningsprocess.

> Visa eller argumentera för att följande likhet är korrekt när n går mot oändligheten.
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$$

Vi kan börja med att skriva första termen på samma form som de övriga. Alltså

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$$

Vi undersöker hur talserien växer. Blir varje term större eller mindre? Ju större nämnare desto mindre är stambråket. Det innebär att varje efterföljande term är mindre än sin föregående term. Vi kan dra slutsatsen att talserien växer långsammare och långsammare.

Vi räknar några av de första summorna och ser vad som händer.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{10\cdot 11}=\frac{10}{11}\approx 0{,}91$$

Nu kan vi koncentrera oss på uppbygganden av varje term, där begreppsförståelse är central. I detta fall handlar det om bråk och bråkräkning. Vi har ett bråk där nämnaren är en produkt av två på varandra följande tal, och täljaren är 1. Går det att skriva om ett sådant bråk på något sätt så att andra egenskaper framträder? Vi kan testa de fyra räknesätten, då kanske hittar vi något.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\ldots=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3}$$

Här framträder ett intressant samband som kan vara användbart: ett bråk med en produk i nämnaren går att skriva om som en subtraktion av stambråk.

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Alltså kan vi om skriva den ursprungliga talserien från uppgiften på följande sätt:

$$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

Vi ser att varje stambråk kommer att adderas en gång och subtraheras en gång, det vill säga alla på varandra följande termer tar parvis ut varandra:

$$-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}$$

Kvar blir endast första och sista termen: $1-\frac{1}{n+1}$

Vi testar och jämför några olika värden på n:

$n=10$	$\frac{1}{11}\approx 0{,}091$
$n=100=10^2$	$\frac{1}{101}\approx 0{,}0099$
$n=1000000=10^6$	$\frac{1}{1000001}<\frac{1}{10^6}=1\cdot 10^{-6}=0{,}000001$
$n=1000000000000=10^{12}$	$\frac{1}{1000000000001}<\frac{1}{10^{12}}=1\cdot 10^{-12}=$ $0{,}000000000001$

Här är summan större än $1-0{,}000000000001=0{,}999999999999$.

Vi kan dra slutsatsen att om n väljs otroligt stort, såsom $1000000\ldots000$, kommer summan att vara större än: $1-0{,}000000\ldots001=0{,}99999\ldots999$. Ju större n väljs desto mer närmar sig summan ett, men den kommer aldrig över ett. Därför kan vi påstå att summan är ett när n går mot oändligheten. Vi kan påstå att vi har bevisat, med hjälp grundläggande aritmetik och resonemang, att serien är en konvergent serie med summan 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Det abstrakta, kompakta och kraftfulla matematiska språket är som konst; för somliga vackert och elegant och för andra obegripligt, speciellt för dem som inte känner till språket.