Klas Lunderup

Pisanoperioder i Fibonaccis talföljd

Fibonaccis talföljd har inspirerat många matematiker genom historien och erbjuder rika möjligheter för elever att utforska mönster och fascineras av matematikens skönhet. Ett speciellt mönster är de så kallade pisanoperioderna.

Leonardo av Pisa eller Fibonacci, som han vanligtvis omnämns, presenterade i sin bok *Liber Abaci* en talföljd där de två första talen är $F_1 = F_2 = 1$. Varje tal i fortsättningen är summan av det två föregående talen.

$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$$
$$F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$$

Talföljden kan uttryckas med rekursionsformeln:

$$F_{(n+2)} = F_{(n+1)} + F_{(n)} \quad \text{för } n = 1, 2, 3 \ldots$$

Talföljden utgår ifrån ett, biologiskt sett orealistiskt, scenario där ett ursprungligt kaninpar förökar sig enligt vissa uppställda principer. Antalet kaninpar i varje ny generation motsvaras av ett fibonaccital. Talföljden börjar med talet ett, men rent matematiskt kan man också tillåta att talföljden börjar med talet noll.

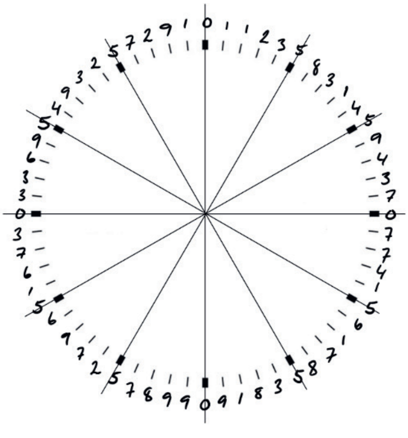
Om talet noll räknas som det första talet blir de 60 första Fibonaccitalen

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots 956\,722\,026\,041$$

Entalssiffran för dessa 60 tal ger talföljden

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4 \ldots 1$$

Vi placerar ut talen ekvidistant runt en cirkel, från ”klockan tolv” med fortsättning medurs. Entalssiffran är samma som resten vid division med 10 för varje fibonaccital, alltså räkning modulo 10. Vi upptäcker direkt märkliga symmetrier och spännande mönster!



- Nollorna placerar sig i väderstrecken norr, söder, öster och väster.
- Femmorna placerar sig symmetriskt däremellan och vi får en indelning i tolv lika cirkelsektorer med medelpunktsvinkeln 30 grader.
- Summan diametralt är alltid 10, bortsett från norr – söder och öster – väster, där summan är 0. Talet 10 är dock kongruent med talet 0 modulo 10.

- På varje sida om en nolla finns två lika tal. Därefter kommer två tal som ger summan 10, två lika tal igen, åter igen summan 10 och sedan två femmor som är två lika tal och dessutom har summan 10.
- Vi får en fibonaccitalföljd om vi vandrar 30 grader medurs oavsett var vi börjar. Låt oss börja på ettan ”en minut över tolv”. Vi vandrar 30 grader medurs och kommer till 8, därefter till 9 och sedan till 7. Räknar vi modulo 10 stämmer det eftersom $8 + 9 = 17$ som har entalssiffran 7 och så vidare.

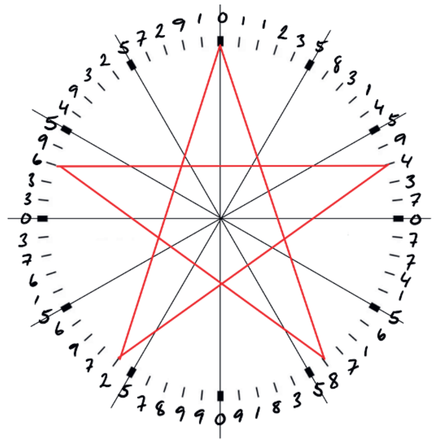
Spännande pentagram

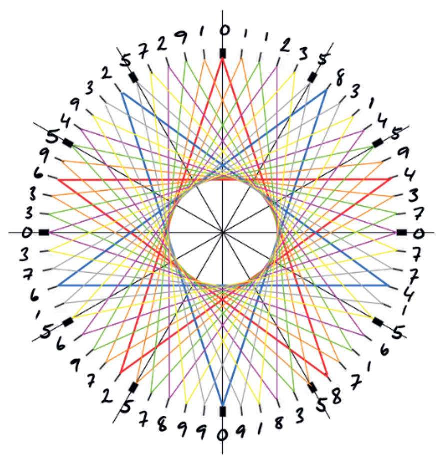
Om vi ritar in en femuddig stjärna, eller rättare sagt ett pentagram, med en spets i norr, upptäcker vi att alla spetsar hamnar på jämna tal. Vi kan få talen 0, 2, 4, 6 och 8 genom att förflytta oss 144 grader moturs i pentagrammet.

Det går att rita in totalt 12 pentagram, 4 med spetsar på de jämna talen och 8 med spetsar på de udda talen. Vi kommer till de jämna talen 0, 2, 4, 6 och 8 respektive de udda talen 1, 3, 5, 7 och 9 genom förflyttningar 144 grader alternativt 72 grader medurs eller moturs.

Det finns en fascinerande symmetri även i detta som jag tyvärr inte kan redogöra för här. Jag går igenom alla pentagrammen i videoklippet ”Fibonaccitalen – fler hemligheter” på min YouTube-kanal ”Doktor Algebra”.

I cirkeln använde vi de 60 första fibonaccitalen. Om vi tittar på de 60 följande talen, de 60 därpå följande och så vidare, får vi samma följd av tal räknat modulo 10. Man säger att fibonaccitalen modulo 10 ger en *pisanoperiod* med längden 60 tal. Det finns fler pisanoperioder. Räkning modulo 5 ger en pisanoperiod med längden 20 tal.





LÄS MER OM FIBONACCITAL

Berggren, P. (2011). *Från Fibonacci till algebra*. Nämnaren 2011:2.
Dunkels, A. (1980). *Miniporträttet Fibonacci*. Nämnaren 1980:3.