



René Descartes 1596–1650

## Cogito ergo sum

*Cogito ergo sum* – Jag tänker, alltså finns jag. Citatet kommer från René Descartes, en fransk 1600-talsfilosof och matematiker som anses vara grundaren till den analytiska geometrin och som givit namn åt det cartesiska koordinatsystemet. Inbjuden av drottning Kristina kom han 1649 till Stockholm där han tragiskt nog dog i lunginflammation efter bara några månader.

Matematik beskrivs ofta som en abstrakt och generell vetenskap. Att matematiken är abstrakt innebär att vi bara får tillgång till den genom vårt tänkande. Den finns så att säga i vårt medvetande. Visst finns det en rad matematiska representationer i form av symbolsystem, tabeller, grafer och geometriska konstruktioner som vi kan titta på och som kan förmedla kunskap om den abstrakta matema-

tiken från en människa till en annan eller från en tid till en annan. Men vi talar om dessa som *representationer* av matematiken, medan de matematiska objekten i sig är abstrakta och definieras i första hand av hur de relaterar till varandra. Matematiken är således i första hand en värld som är öppen för den tänkande människan. Att lära sig matematik borde därmed i huvudsak handla om att utveckla sitt tänkande.

## Matematiskt tänkande

Didaktiska teorier om vad som bygger upp matematiskt kunnande brukar också lyfta upp matematiskt tänkande som en viktig kompetens. År 2002 publicerade danskarna Mogens Niss och Tomas Højgaard Jensen en rapport med titeln *Kompetencer og matematiklæring*. I rapporten redogjorde de för ett ramverk, en *kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed*, som kom att få mycket stort genomslag i den matematikdidaktiska forskningsvärlden och som har fungerat som underlag för såväl läroplaner som internationella tester under de senaste 20 åren. *Tankegangskompetence* är en av åtta matematiska kompetenser som ramverket innehåller. Tankegangskompetens beskrivs i termer av att kunna förstå vad som menas med generalisering och abstraktion och att förstå vad som utmärker matematiska frågor och svar, samt att kunna skilja på och använda sig av olika sorters matematiska utsagor såsom satser, definitioner, generella utsagor, antaganden, hypoteser, verifiering, bevis med mera. Tankegangskompetens särskiljs från förmågan att kunna föra matematiska resonemang som i det danska ramverket är en egen kompetens.

## Vad är matematiskt tänkande?

Jag ger mig ut på nätet och söker svar på frågan.

”Matematiskt tänkande är förmåga att tänka och arbeta med tal som genererar logisk resonemangsförmåga.”

”Matematiskt tänkande är mycket mer än att bara kunna räkna eller lösa algebraproblem. Det är ett helt eget synsätt som handlar om att kunna plocka bort allt oväsentligt, oavsett om det är numeriskt, strukturellt eller logiskt och sedan analysera de underliggande mönstren.”

”Matematiskt tänkande är att tänka som matematiker – en kraftfull kognitiv process som utvecklats under tusentals år.”

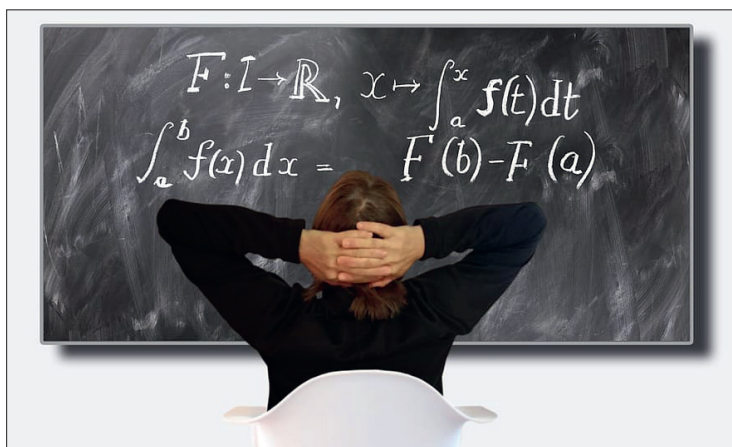
”Att utforska, ifrågasätta, arbeta systematiskt, visualisera, gissa, förklara, generalisera, motivera, bevisa ... är nyckeln till matematiskt tänkande.”

Inom det didaktiska forskningsfältet är det många som skrivit om matematiskt tänkande. En av dem är den ofta citerade australiensaren Kaye Stacey som i sin text *What is mathematical thinking and why is it important?* argumenterar för att matematiskt tänkande är viktigt på tre olika sätt:

- ◆ Matematiskt tänkande *i sig* är en viktig målsättning för skolan.
- ◆ Matematiskt tänkande är viktigt för att kunna *lära sig* matematik.
- ◆ Matematiskt tänkande är nödvändigt för att kunna *undervisa* i matematik.

En bok som i engelskspråkiga delar av världen snabbt kommit att bli en klassiker är boken *Thinking mathematically* av Johan Mason, Leone Burton och Kaye Stacey. Där beskrivs ett förhållningssätt till matematik som går ut på att lära sig matematiskt tänkande. Boken sammanfattas i fem punkter:

1. Du kan tänka matematiskt.
2. Matematiskt tänkande kan förbättras genom reflektion.
3. Matematiskt tänkande triggas av motsägelser, spänningar och överraskningar.
4. Matematiskt tänkande förstärks av ifrågasättande, utmaningar och reflektion.
5. Matematiskt tänkande hjälper dig att förstå dig själv och din omvärld.



## Olika sorters matematisk tänkande

Utöver matematiskt tänkande som en generell förmåga och ett övergripande sätt att tänka är det vanligt inom den matematikdidaktiska forskningen att sätta andra mer specifika namn på olika sorters tänkande som alla ryms inom det matematiska fältet. Olika sorters tänkande utvecklar sina egna symbol-system och representationer som både underlättar själva tänkandet och gör det möjligt att kommunicera tankarna till andra. Det är som med alla språk – utan ett språk att tänka med blir tankarna väldigt begränsade, och utan ett språk att kommunicera tankarna med blir de kvar inne i huvudet. Här är några exempel på olika sorters tänkande som en elev i skolan behöver utveckla.

### *Logiskt tänkande*

Logik är ett vetenskapligt område som studeras inom filosofin, vilket visar att matematik ursprungligen var ett filosofiskt ämne, inte tekniskt eller naturvetenskapligt. Än i dag får den som disputerar i matematik titeln Filosofie Doktor. Logiskt tänkande handlar om att sätta upp villkor och dra slutsatser som är ovedersägliga enligt logikens lagar. Att kunna tänka logiskt är basen för matematisk bevisföring och en hörnsten inom matematiken.

### *Numeriskt tänkande*

Numeriskt tänkande kallas också aritmetiskt tänkande och innefattar att kunna räkna och beräkna saker, att tänka *om tal* och *med hjälp av tal*. Det är en sorts tänkande som används för att kvantifiera världen och är basen för vardagslivets matematik.



### *Algebraiskt tänkande*

Att tänka algebraiskt är att kunna tänka på generella storheter och hantera okända tal. Det handlar om att behandla matematiska samband på ett strukturellt sätt utan att utgå från specifika tal samt att kunna upptäcka och beskriva mönster och strukturer.

### *Algoritmiskt tänkande*

Algoritmiskt tänkande innebär att tänka sekventiellt, i små väldefinierade steg som är så otvetydiga att resultatet upprepas om samma steg följs av någon annan. Det handlar om flödesscheman och standardiserade beräkningsmetoder och ligger till grund för hur vi programmerar datorer.

### *Datalogiskt tänkande*

Under 1980-talet föddes begreppet datalogiskt tänkande, på engelska computational thinking, som ett sätt att beskriva hur en programmerare tänker. Datalogiskt tänkande innefattar algoritmiskt tänkande, men även olika sätt att arbeta som är karakteristiska för programmerare, till exempel debugging, tinkering och remixing.

## En tankeställare på biennalen

I år blev jag inbjuden av Skolverket att delta i ett panelsamtal som en programpunkt på matematikbiennalen i Växjö. Ämnet för samtalet var: "Algebraiskt tänkande – utmaningar vid realiseringen av kursplanen". Eftersom min forskning ofta handlat om algebraundervisning har jag läst och funderat en hel del på vad algebraiskt tänkande är och hur undervisning kan hjälpa elever att utveckla detta sätt att tänka. När jag så skulle förbereda mig inför panelsamtalet granskade jag kursplanen noga för att se vad där stod om algebraiskt tänkande. Där stod ingenting. Mitt svar på frågan fick därför bli kort och gott: utmaningen är att få lärare att förstå att de ska undervisa om något som inte står i kursplanen. Jag började söka specifikt efter orden tänkande och förståelse och fann till min förvåning att dessa saknades helt i kursplanen för matematik.

## Tänkande och förståelse i kursplanen

En sökning efter orden tänkande/tänka och förståelse/förstå i de fem läroplaner som varit aktuella under min livstid gav ett intressant resultat. Om vi bara tittar i beskrivningen av matematikämnet eller kursplanen i matematik får vi följande träffar.

- Lgr 62* ... kvantitetsuppfattning och matematiskt *tänkande*  
... utvecklingen från lösning med hjälp av konkret arbetsmateriel och vardagligt språk till *tänkande* i talsymboler  
... noggrannhet, kritiskt *tänkande* och självkontroll  
...*förståelse* av tialssystemet (åk 2)  
...*förståelsen* av bråkbegreppet (åk 7)
- Lgr 69* Undervisningen i matematik skall utgå från elevernas erfarenheter och föreställningar och grundas på *förståelse*  
... noggrannhet, kritiskt *tänkande* och självkontroll
- Lgr 80* Förmågan att *tänka* i geometriska modeller  
... ta tillvara elevernas nyfikenhet och fantasi samt utveckla deras logiska *tänkande*
- Lpo 94* Mål att sträva mot:  
... får tilltro till det egna *tänkandet* ...  
...*förstår* och kan använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera  
... ett aktivt och öppet sökande efter *förståelse*

### *Lgr 11, Lgr 22*

I den nuvarande kursplanen för matematikämnet, inklusive kunskapskraven, får jag ingen träff på orden tänkande/tänka eller förståelse/förstå. Istället beskrivs syftet i termer av förmåga att använda, beskriva, välja, formulera, lösa, värdera, föra och följa resonemang, samtala om och redogöra för.

I naturvetenskapliga ämnen nämns kritiskt tänkande och i språkämnena framhålls språk som redskap för att tänka, men i matematik finns ingenting om tänkande. Lite trösterikt är att det i alla fall finns omnämnt i den inledande texten som beskriver skolans övergripande mål och riktlinjer. Där står det: "Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet."

## Eftertanke

Frågan som kan ställas efter denna granskning är om matematikämnet verkligen förbereder eleverna för matematiskt tänkande *efter* genomgången grundskola om de inte *under* sin tid i grundskola också får träna på matematiskt tänkande. Varför är inte förmågan till matematiskt tänkande ett mål för undervisningen i ämnet matematik? Och varför lyfts inte förståelse fram som något eftersträväsvärt?

I tankarna återvänder jag till panelsamtalet på biennalen och funderar vidare. Algebrainnehållet i kursplanen ändrades efter en revidering 2017 när nytt innehåll adderades. Programmering i form av stegvisa instruktioner och algoritmer (vilket kan sägas vara samma sak) skrevs in som en del av algebrans centrala innehåll. Därmed skapade man en ny didaktisk utmaning genom att algoritmiskt tänkande lätt kan förväxlas med algebraiskt tänkande. Att tänka stegvis är inte detsamma som att tänka strukturellt. Att kunna följa en sekvenserad instruktion är att tänka innanför ramarna eller att sätta upp strikta ramar, men för att upptäcka mönster måste man kunna tänka utanför ramarna.

Om vi verkligen vill uppnå läroplanens övergripande mål att eleverna *efter* genomgången grundskola kan använda sig av matematiskt tänkande är det kanske lämpligt att även införa matematiskt tänkande som en målsättning i matematikundervisningen.

## Cogito ergo sum

### LITTERATUR

Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?* University of Melbourne, Australia.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Pearson.

## Månssons mannar



Månsson