Jöran Petersson

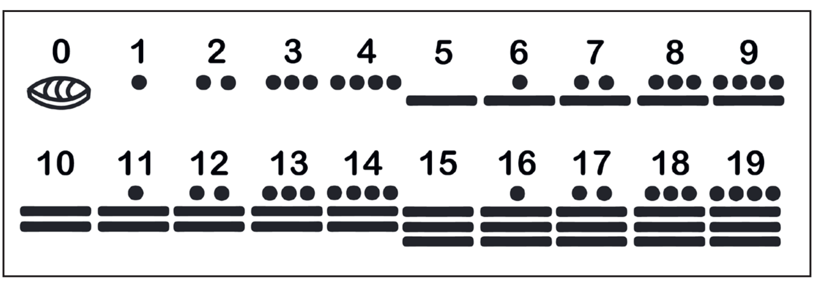
Teknikdrivna och kulturdrivna skiften i skolmatematiken

Artikeln resonerar kring vad som driver förändringar i skolmatematiken och vilka konsekvenser dessa förändringar fått för undervisningen. Några distinkta skiften som berör talsymboler och räknande tas upp och exemplifieras med hjälp av ett antal Nämnarenartikar som kan ge uppslag till fördjupad läsning.

Ett välkänt forskningsresultat i matematikdidaktik är att skolmatematiken inte är neutral i förhållande till tekniken. Mer generellt gäller att skiften i skolmatematikens innehåll kan vara såväl teknikdrivna som kulturdrivna. I och med att programmering infördes i läroplanen står vi inför ett teknikdrivet skifte genom att inlemma digitala verktyg i skolmatematiken. Det kan vara svårt att förutse vilka följder detta skifte kommer att få för skolmatematiken. Det är därför lämpligt att blicka bakåt och reflektera över hur skolmatematiken har påverkats av några teknik- och kulturdrivna skiften genom historien.

Ett kulturdrivet skifte: behovet att dokumentera antal i skrift

Vi börjar med att konstatera att de äldsta kända talsymbolerna utgjordes av streck och prickar. Strecken liknade fingrar (på latin *digit*) och prickarna liknade de småstenar (på latin *calculi*) som man använde för räknandet och som sedan vidareutvecklades till en abakus, ett under lång tid dominerande räkneverktyg. Mayaindianerna byggde sitt talsystem på stenar och pinnar. En rimlig gissning är att småsten användes när fingrarna inte räckte till eller behövdes till annat. Av både namn och form på tidiga kulturers talsymboler kan vi gissa att det var just fingrar och exempelvis småsten som avbildades när man ville dokumentera antalet i skrift.

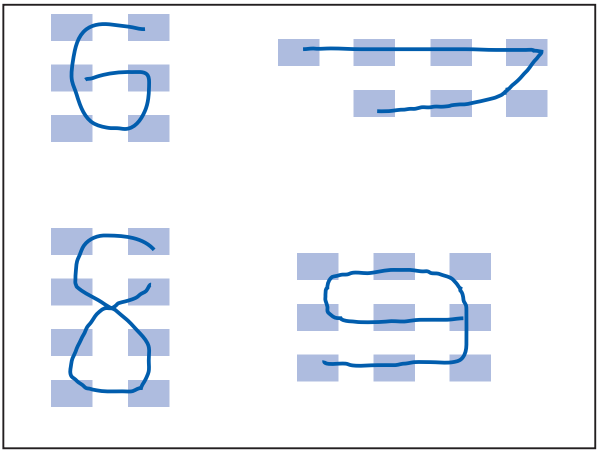


Streck och prickar, eller pinnar och stenar, visar tal i Mayakulturens talsystem.

Eftersom många talsymboler uppstod i jordbrukarsamhällen kan vi anta att det var ett kulturellt behov av att räkna som drev utvecklingen. Jämfört med jägare och samlare hade jordbrukarna ett större behov av att planera tillgången på mat fram till nästa skörd och senare även bedriva handel med överskottet. Tidiga talsymboler följde ett-till-ett-principen om en symbol för varje räknat föremål och vi kan gissa att detta har ett samband med att de inte ingick i ett positionssystem i dagens mening utan istället var adderande talsystem utan nolla. I exempelvis det koptiska talsystemet fick man räkna antalet ettor, antalet tiosymboler, antalet hundrasymboler och så vidare för att få det totala antalet. Det romerska talsystemet saknade egentlig bas då det hade egna symboler även för 5, 50 och 500 (och i sällsynta fall även en del andra tal, exempelvis H = 200 och E = 250). En del abakuser har en motsvarande uppdelning av fem kulor på var sida av en avgränsande ribba. I sådana adderande talsystem är det smidigt att utföra additioner och subtraktioner medan multiplikationer och divisioner är mer krävande.

Ett teknikdrivet skifte: att skriva i lera eller på papyrus

Ett viktigt skifte i siffrornas form var övergången till de hindu-arabiska siffrorna. Georges Ifrah argumenterar i boken *Räknekonstens kulturhistoria* för att det helt enkelt var ett byte av skrivunderlag, alltså att detta skifte var teknikdrivet. När man skriver på lertavlor måste man lyfta pennan mellan varje prick medan det på papyrus blir möjligt att binda samman prickarna med ett enda penndrag som i figuren nedan.



Med dessa talsymboler ser vi att steget till att uppfinna dagens positionssystem med nolla blev betydligt kortare, jämfört med de romerska och egyptiska talsystemen, och i efterhand nära nog en naturlig utveckling. Med detta sagt antyder jag att det var teknikskiftet att börja skriva på papyrus som indirekt ledde till att positionssystemet slog igenom på bred front.

Två kulturdrivna skiften: algoritmer och logaritmer

Under högmedeltiden nådde de hindu-arabiska talsymbolerna norra Italien, som var en viktig knutpunkt för handeln mellan Främre Orienten och övriga Europa. I denna handelskultur fanns ett stort behov av att räkna. Detta blev en grogrund för tävlingar mellan abakister som utförde beräkningar med en abakus och algorister som använde algoritmer. Algoristerna var oftast snabbast. På sikt ledde det till att såväl abakus som de romerska talsymbolerna sakta trängdes ut och de senare blev kvar endast i specifika sammanhang som på klockor och i högtidliga sammanhang såsom i inskrifter. Därmed var detta skifte inte teknikdrivet utan kulturdrivet genom handelns behov av effektiv räknekonst. I algoristernas spår utvecklades flera varianter av räkneuppställningar, vilket Kurt-Allan Paulsson har beskrivit i artikeln *Hur räknar du människa?* I äldre matematikdidaktisk litteratur kan man se spår av en debatt om vilken uppställning för multiplikation och division som fungerade bäst i klassrummet avseende säkerhet och snabbhet.

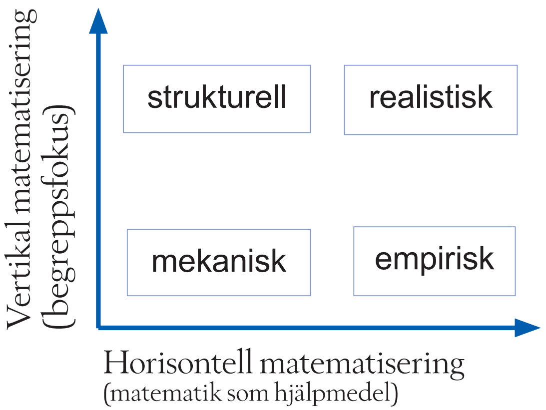
Bakom uppfinningen av logaritmerna låg en serie naturvetenskapliga framsteg. Galileo var en pionjär i att använda teleskop i astronomin och efter honom gav de allt bättre stjärnkikarna alltmer exakta astronomiska observationer. I sin tur kunde Newton använda dessa data för att visa att gravitationen ger en elegant beskrivning av hur solsystemet fungerar. Med den celesta mekaniken blev behovet att räkna överväldigande stort. Det var i detta sammanhang som logaritmerna uppfanns och som genom räknestickorna blev ett centralt hjälpmedel, vilket beskrivs mer detaljerat av Jan Unenge i artikeln *Neper – en outtröttlig räknemästare.* Vi kan därmed beskriva logaritmernas intåg i skolmatematiken som ett kulturdrivet skifte.

Ett teknikdrivet skifte: miniräknaren

Fram till miniräknarens intåg i skolan var algoritmer och logaritmer oumbärliga i räknandet i många yrken såsom läkemedelsräkning, ingenjörsyrken, handel, byggnadsarbete, bankväsende och administration. Yrkesräknandets praktik har två viktiga egenskaper. Dels sker det på betald arbetstid och därför är det viktigt att det går snabbt. Dels ställer yrket inget formellt krav på att arbetstagaren ska förstå själva räknandet (även om denne naturligtvis behöver förstå hur resultatet ska användas i yrket). Då läroplanen avspeglar samhällets behov blir motsvarande mål i skolmatematiken att betona drill men inte nödvändigtvis förståelse av hur algoritmerna fungerar. I artikeln *Är alla försök dömda att lyckas?* beskriver Anna-Stina Orstadius nackdelar med en sådan undervisning. När mellanstadieelever började arbeta med miniräknaren dröjde det bara några månader innan många hade glömt de tidigare använda standarduppställningarna. En möjlig slutsats av det är att drill utan förståelse kräver ständigt bruk av kunskaperna för att man inte ska glömma dem. Denna förutsättning uppfylldes tydligt i ett samhälle där yrkeslivets räknande skedde i den dagliga verksamheten för hand och utan miniräknare. När miniräknaren introducerades tappade denna kunskapsform sitt värde. Det blev aktuellt att ställa sig frågan: Behövs logaritmer och algoritmräkning nu när vi har miniräknare?

Horisontell och vertikal matematisering

Innan vi diskuterar vad som hände sedan presenterar vi fyra matematikdidaktiska riktningar enligt Adrian Treffers modell som illustreras i bilden.



Treffers modell, beskriven i Skott med flera.

Den horisontella axeln avser aspekten *matematik som hjälpämne*, det vill säga i vilken mån matematiken är tillämpad. Den vertikala avser aspekten *fokus begreppsförståelse*, det vill säga i vilken mån matematiken generaliseras. Den ovan beskrivna undervisning som syftade till att drilla elever i uppställningar för de fyra räknesätten passar bäst in i fältet *mekanisk* längst ner till vänster. I den var varken tillämpningar eller begreppsförståelse i fokus. Undervisning som bygger på problemlösning passar bäst in på fältet *empirisk* längst ner till höger. Fältet *strukturell* beskriver ganska väl 1960- och 70-talets undervisning som utgick från mängdläran och som kom att kallas *den nya matematiken*. Den har fått omdömet att den nog kunde ha varit lyckad om den även hade tagit med tillämpningar. Att utgå från behovet eller viljan att lösa ett empiriskt problem, men att under detta arbete betona det strukturella, är kärnan i den holländska inriktningen RME (Realistic Mathematics Education), där Hans Freudenthal var en centralfigur. Ordet *realistisk* avser här att tillämpningarna kan vara vad som helst som eleverna anser vara relevant och föreställningsbart, inklusive tomtar och troll. Rätt och slätt det som i läroplanen Lpo 94 kallades för elevnära.

Algoritmer och logaritmer får nya roller i miniräknarens tider

Så här i efterhand ser vi att teknikskiftet att införa miniräknaren ledde till åtminstone följande förändringar i skolmatematiken. Logaritmer i form av räknestickan behövdes inte längre. Från att ha varit ett hjälpmedel i aritmetik för att snabbt beräkna produkter och kvoter fick logaritmer i stället ett nytt uppdrag i algebran i förenklingsuppgifter i stil med ”förenkla log(8)–log(2)”. Algoritmräkningen kom att kraftigt tonas ned och bytas mot att eleverna själva fick upptäcka och formulera uppställningar, se exempelvis Rolf Hedréns artikel om skriftliga beräkningsmetoder. Dessa två förändringar beskrivs nog bäst som ett steg i vertikal riktning mot fältet strukturell. Senare exempel på steg i den strukturella riktningen beskrivs i Mona Røsslunds artikel *Vägen till standardalgoritmer* och Jöran Peterssons artikel *Multiplikation i rutnät*, där grafiska räknescheman används för att tydliggöra den kommutativa och den distributiva lagen samt positionssystemets roll i multiplikation.

En annan förändring var att i skolmatematiken ta ett steg i empirisk riktning i form av problemlösning där matematiken blev ett hjälpämne till att lösa problem hämtade från andra skolämnen och från elevernas kommande arbetsliv och vardag. Naturligtvis behövdes de fyra räknesätten i detta.

Logaritmernas roll i problemlösningen blev diverse tillämpningar på exempelvis decibel, Richterskala, pH, exponentiell förändring i osmos, värmetransport och radioaktivitet, logaritmiska skalor i optik (från radiostrålning till gammastrålning), kosmologi (från atomstorlek till universums storlek), geologiska tidsskalor, konsumentprisindex och ekonomiska tillväxtkurvor i allmänhet, och faktiskt även musikens oktaver som är linjära på pianot men exponentiella till frekvensen.

Ett teknikdrivet skifte: programmering i skolmatematiken

Exemplen ovan visar att kulturskiften och teknikskiften driver förändringar i matematiseringen av skolmatematiken. Idag har vi ett nytt skifte i skolmatematiken i och med att programmering har införts i kursplanen för matematik. För att förebygga stoffträngsel, har skolmatematiken nyss fått mer utrymme i timplanen. Vi har nu åtminstone två val. Vi kan antingen välja att undervisa programmering som ett fristående separat avsnitt i matematikundervisningen, vilket kan behövas ibland, om än i mindre omfattning. Eller så kan vi välja att integrera programmering i matematikundervisningen, vilket nog är ett bättre val. Ett exempel ges i Jöran Peterssons artikel *Algoritmer + datastrukturer = program*, där det står om hur vi kan använda programmering för att undervisa matematiska begrepp. Artikeln handlar om hur miniräknaren gör för att beräkna exempelvis rötter, men vi skulle lika gärna kunna programmera en tärning för att använda den i sannolikhetsläran för strukturell matematisering om hur betingad sannolikhet fungerar och som empirisk matematisering av verkliga slumpfenomen.

Avslutningsvis spekulerar jag över en möjlig realistisk matematisering: Att elever utvecklar en matematisk modell, sedan programmerar den och därefter simulerar dess egenskaper. Sådan undervisning integrerar matematiskt innehåll, programmering och det sedan Lgr 11 och Lgy 11 nya innehållet ”formulera … modeller”, vilket ställer andra krav än tidigare läroplaners ”att använda … modeller”. Det kräver dock ett omfattande utvecklingsarbete i aktionsforskningsanda för att pröva ut vilka problem som passar att bli modellerade av elever i högstadiet och gymnasiet och undersöka eventuella fördelar och fallgropar som finns för elevernas kunskapsutveckling och lärarnas förberedelsearbete.

LITTERATUR

Ifrah, G. (2002). *Räknekonstens kulturhistoria.* Bonniers.
Hedrén, R. *Kan elever hitta på egna skriftliga beräkningsmetoder?* Nämnaren 1999:4.
Orstadius, A-S. (1983). *Är alla försök dömda att lyckas?* Nämnaren 1983:3.
Paulsson, K-A. (1986). *Hur räknar du – människa?* Nämnaren 1986:1.
Petersson, J. (2016). *Multiplikation i rutnät.* Nämnaren 2016:2.
Petersson, J. (2018). *Algoritmer + datastrukturer = program.* Nämnaren 2018:2.
Røsslund, M. (2014). *Vägen till standardalgoritmer.* Nämnaren 2014:1.
Unenge, J. (1983). *Neper – en outtröttlig räknemästare.* Nämnaren 1983:3.
Skott, J., Jess, K., Hansen, H.C. & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare Delta Didaktik*. Gleerups Utbildning.