Andreas Bergwall

Bevis och resonemang

Bevis är en central del av matematiken, och bevis och resonemang förväntas genomsyra all matematikundervisning. Samtidigt är det väl belagt att bevis är svårt, både att lära sig och att undervisa om. Här berättar författaren om sin undersökning av bevisrelaterade resonemang i läromedel och reflekterar över vilket stöd läromedlen erbjuder i detta avseende.

Kärnan i min doktorsavhandling utgörs av läromedelsstudier där jag undersökt hur svenska och finska gymnasieböcker hanterar bevisrelaterade resonemang. I den här artikeln kommer jag att presentera några resultat och utifrån dem ge förslag på hur man kan börja reflektera över sin egen undervisningspraktik i relation till bevis. För att detta ska bli relevant även för den som undervisar på andra nivåer i skolsystemet vill jag vidga synen på vad bevis är, vilka syften de har, och vilken typ av aktiviteter det är som stöder utveckling av de kompetenser som behövs för att förstå och genomföra bevis. Det kommer jag att göra genom att beskriva några olika sätt att se på bevis och bevisrelaterade resonemang som ofta förekommer i den matematikdidaktiska forskningslitteraturen. Allra först ska vi dock titta på vad våra styrdokument har att säga.

Bevis och resonemang i styrdokumenten

I grundskolans kursplan är det egentligen bara inom geometriområdet som det uttryckligen står något som för tankarna till bevis. Geometriområdet ska inkludera "geometriska satser och formler samt argumentation för deras giltighet". I gymnasieskolans ämnesplaner finns tydligare formuleringar där man även pekar ut motivering och bevis av specifika satser som till exempel Pythagoras sats i kurs 2 och trigonometriska identiteter i kurs 4. I kurs 2bc ingår också begrepp som definition, sats, bevis, implikation och ekvivalens. I de flesta kurser och innehållsområden nämns inget om bevis.

Kurs- och ämnesplanerna för grund- och gymnasieskolan uttrycker däremot att eleverna ska ges möjlighet att utveckla förmågan att föra och följa resonemang. Men vad är ett resonemang och vad innebär det att resonera? I Svenska Akademiens ordbok beskrivs ordet resonera som att:

> använda förnuftet eller sitt förnuft för att komma till klarhet om något (och därvid väga skäl och motskäl mot varandra); genomföra eller utveckla en tankegång (med klargörande för sig av skäl eller grunder)

Att resonera i matematik skulle då innebära något mer än att beskriva hur man har gjort för att lösa ett problem. För att kallas ett resonemang ska det ge klarhet och presentera skäl till varför lösningen fungerar och är korrekt. I kunskapskraven används ett annat ordval. Istället för att väga skäl så talas det om att ”eleven för och följer matematiska resonemang genom att framföra och bemöta påståenden med underbyggda matematiska argument”. Vad som kännetecknar ett underbyggt matematiskt argument är inte så lätt att beskriva.

Bevis och resonemang i matematikdidaktisk litteratur

Ett syfte med ett matematiskt resonemang är att övertyga någon om att en viss slutsats verkligen stämmer. Resonemanget ska presentera argument som undanröjer alla tvivel och som gör det omöjligt att ifrågasätta slutsatsen.

Vilka typer av argument är övertygande?

Guershon Harel och Larry Sowder delar in de typer av argument som vi använder oss av i tre huvudkategorier.

- *Yttre argument.* I många sammanhang låter vi oss övertygas av sådant som egentligen inte har med själva innehållet att göra. Vi kanske utgår från att det en person säger är sant bara för att vi känner förtroende för personen.
- *Empiriska argument.* Genom att samla in, analysera och tolka data kan vi finna stöd för eller emot ett påstående.
- *Deduktiva argument.* I matematiken har vi en helt unik tredje möjlighet genom att på logisk väg härleda hur det måste ligga till.

Att den tredje möjligheten finns innebär dock inte att vi alltid använder den, eller att det är rimligt att göra det. Vi kan bli nog så övertygade av argument av de första två slagen även när vi ägnar oss åt matematik. Däremot kan vi säga att det är den tredje typen av argument som är själva grundbulten för matematik som vetenskap. Det är den typen av argument som vi vill att eleverna ska förstå nödvändigheten av och styrkan i. Det är resonemang som innehåller den typen av argument som vi vill att de ska lära sig att föra och följa.

De yttre argumenten är alltså egentligen inte matematiska. Varje gång vi utan ytterligare förklaring säger att ”man kan bevisa att” eller ”det bara är så” är det ett yttre argument eftersom vi förväntar oss att eleverna ska tro oss utan att vi presenterar några matematiska argument. Samma sak när en elev motiverar sitt tillvägagångssätt genom att hänvisa till att ”så gjorde de i boken”, eller till att kompisen sa att det var på ett visst sätt.

Empiriska argument består typiskt i att vi utifrån exempel och specialfall, eller genom att mäta i en figur, drar slutsatser om generella principer. Vi kanske mäter och beräknar vinkelsumman i fem olika trianglar och använder det som argument för att den alltid är 180 grader. Det duger inte som ett matematiskt bevis. Samtidigt är det inte fel med den typen av undersökande aktiviteter. Tvärtom, matematik handlar om att se mönster och att kunna göra generaliseringar. Och ibland är empiriska argument fullt tillräckliga. Om någon tror att vinkelsumman i en triangel alltid är 200 grader så räcker det att mäta i en enda triangel för att avslöja att hen har fel.

Slutligen är det bland de deduktiva argumenten vi finner de generella resonemangen, de ”riktiga” bevisen. Vad vi menar med riktiga bevis kan delvis vara olika i olika skolår.

Vad ska utmärka ett bevis i skolsammanhang?

När vi tänker på matematiska bevis så är det lätt att tankarna går till bevis av det slag vi stött på i avancerade universitetskurser: formella, teoretiskt invecklade och långa resonemangskedjor som presenteras med mängder av märkliga symboler. Men då måste vi komma ihåg att när matematiker presenterar bevis för varandra så (1) har de en väldigt stor mängd matematiska resultat som de kan räkna med att alla känner till och som de därför kan stödja sina resonemang på utan ytterligare motivering, (2) är de vana vid många olika bevistekniker och sofistikerade sätt att resonera och dra slutsatser på, och (3) har de ett väl inövat symbolspråk med begrepp och notation som alla är vana vid att använda. Om vi sätter dessa tre punkter i en elevkontext kan vi ersätta dem med följande:

1. de resultat som eleverna kan förväntas vara bekanta med
2. de sätt att resonera och dra slutsatser på som eleverna behärskar
3. de symboler och skrivsätt som eleverna är vana vid att använda.

Då får vi naturligtvis helt andra förutsättningar. För eleverna i skolan är det rimligen de resonemang som kan föras under dessa förutsättningar som ska kallas bevis. Andreas J. Stylianides har därför föreslagit en definition av bevis som utgår från de här tre punkterna. Fördelen med att se på bevis på det sätt som han gör är att de då blir relevanta på alla nivåer i utbildningssystemet. Att bemöta påståenden med underbyggda matematiska argument skulle kunna beskrivas som att man ska utgå från det man redan vet, dra slutsatser utifrån det och kommunicera sina idéer med lämpliga matematiska uttrycksformer. Det är naturligtvis viktigt att det också finns en progression som gör att eleven alltmer närmar sig matematikers förutsättningar och kan resonera alltmer som matematiker gör.

Vilka syften kan ett bevis ha?

Det sprids ofta en bild av att bevisens främsta syften är att *övertyga* eller att *verifiera*. De krävs för att vi ska kunna vara helt säkra på vad som är sant eller inte i matematik. Det här är naturligtvis viktiga syften med bevis. Matematiken är en av få vetenskaper som faktiskt erbjuder möjligheten att på strikt logisk väg sluta sig till vad som är sant medan de flesta andra vetenskaper får nöja sig med empiriskt stöd för sina påståenden. Men frågar man matematiker så visar det sig att bevis kan ha helt andra syften och att beviset är något man försöker konstruera först efter att man har övertygat sig om att ett påstående är sant. Vad är i så fall syftet med ett bevis? Ett viktigt syfte är att de kan *förklara*, det vill säga de hjälper oss att se *varför* något gäller (och inte bara *att* det måste gälla, vilket är tillräckligt för den verifierande funktionen). Genom att beviset kopplar ihop nya kunskaper med gamla bidrar det till att organisera och *systematisera* det matematiska kunnandet. Många matematiker skulle kanske säga att det är det allra viktigaste syftet. Detta gör också att bevisen banar väg till att *upptäcka* ny matematik. Inte minst är de centrala för att *kommunicera* matematiska idéer. Dessutom erbjuder de intellektuell utmaning! Om vi tar fasta på ord som övertyga, förklara, upptäcka och kommunicera, och tänker på bevis på det sätt som Stylianides föreslår, så kan de ha en central roll på alla nivåer i skolsystemet. Men i vilka sammanhang och i vilken typ av aktiviteter?

Olika typer av bevisrelaterade resonemang

I skolsammanhang är det kanske uppgifter formulerade som "*visa att…*" som vi först ser framför oss när vi tänker på bevisuppgifter. I sådana uppgifter är ett sant påstående givet och eleven ska försöka (be)visa att det är så. Men för matematiker som arbetar med att utveckla ny matematisk teori är själva processen att konstruera ett bevis inte frikopplad från annat arbete. Snarare handlar det om ett ständigt växlande mellan att formulera och precisera hypoteser, testa deras giltighet, försöka hitta mer eller mindre formella och detaljerade argument för eller emot dem, hitta motexempel, gå igenom resonemang för att se om de håller eller för att identifiera och korrigera brister och felaktigheter i dem. Inför genomförandet av en stor amerikansk läromedelsstudie valde därför Denisse Thompson, Sharon Senk och Gwendolyn Johnson att sätta etiketten *bevisrelaterat resonemang* på den typen av resonerande som behövs i följande sju olika typer av resonemangsaktiviteter:

1. formulera en hypotes
2. undersöka en hypotes
3. argumentera för ett påstående
4. undersöka en argumentation
5. identifiera eller korrigera felaktigheter i en argumentation
6. ge ett motexempel
7. skissa ett bevis.

En viktig idé här är att alla dessa typer av aktiviteter bidrar till att utveckla de förmågor som behövs för att förstå och kunna genomföra bevis. Det innebär alltså att undervisning och lärande av bevis kan (och behöver) vara något mycket mer än att gå igenom färdiga bevis eller att jobba med *visa att*-uppgifter. Det innebär också att många av de undersökande aktiviteter som vi redan använder i vår undervisning, till exempel när vi arbetar med problemlösning, är bevisrelaterade.

Vanliga svårigheter med bevis

Forskningen kring lärande och undervisning av bevis har främst fokuserat på högstadiet och uppåt. Ofta är forskningen kopplad till geometriundervisning och visar mer på svårigheter och missuppfattningar än på vad elever faktiskt kan och klarar av. Det är tydligt att elever på alla nivåer har svårigheter med att förstå och konstruera bevis och att se skillnad på vad som är och inte är ett giltigt bevis. Många elever tycker heller inte att bevis är förklarande. Särskilt vanligt är att man låter sig övertygas om generella principer baserade på enstaka exempel, samtidigt som man inte blir övertygad av riktiga bevis. Det kan yttra sig i att man tror att det kan finnas motexempel till påståenden som man fått bevisade eller att man ser motexempel som undantag. Man kan alltså säga att många svårigheter bottnar i en bristande förståelse av skillnaden mellan yttre, empiriska och deduktiva argument samt vilka slutsatser som kan dras av dem.

Det är även vanligt att elever har problem med själva logiken i påståenden och resonemang. Många tror felaktigt att ett villkorat påstående (om P är sann så är Q sann) är ekvivalent med sin omvändning (om Q är sann så är P sann) eller sin invers (om P är falsk så är Q falsk). Däremot förstår de inte att ett sådant påstående faktiskt är ekvivalent med sin kontrapositiva form (om Q är falsk så är P falsk). Det sistnämnda är själva grunden för så kallade indirekta bevis. Eftersom matematiska resultat och satser nästan alltid uttrycks som villkorade påståenden blir det naturligtvis svårt att föra giltiga resonemang för den som har svårt med de underliggande logiska principerna.

Bevis och resonemang i läromedel

Jag har undersökt hur bevis hanteras i de svenska och finska läromedel som är vanligast på studieförberedande program på gymnasiet. Närmare bestämt har jag undersökt de svenska läromedelsserierna *Matematik 5000* och *Matematik Origo* för c-spåret samt den finska läromedelsserien *Ellips* för det som i Finland brukar kallas "lång kurs". Ellips är en svenskspråkig version av en finsk förlaga, *Pyramidi*, och är avsedd för svensktalande i Finland. De utgåvor som har analyserats är de som använts under 2010-talet och undersökningarna har fokuserat på fyra olika innehållsområden. Ytterligare ett finskspråkigt material, *Pitkä Matematiikka*, analyserades men bara i relation till två av innehållsområdena.

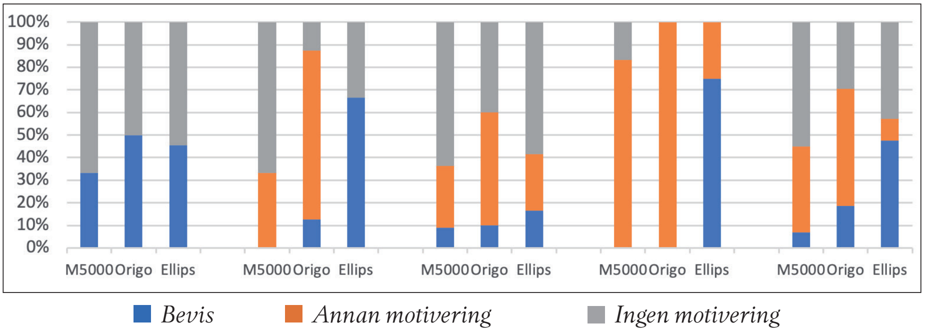
Eftersom det bara är två läromedelsserier per land, och bara vissa innehållsområden som har studerats, måste man vara försiktigt med att generalisera resultaten. Å andra sidan ger resultaten en bild av vad merparten av svenska och finska gymnasieelever som förberett sig för högre utbildning inom matematik, teknik och naturvetenskap, har mött i sina läroböcker. Kärnan i undersökningarna har varit följande två frågeställningar.

- Motiveras de satser och principer som tas upp i böckernas genomgångar? Med vilken typ av argument i så fall?
- I vilken utsträckning finns det bevisrelaterade övningsuppgifter? Vilken typ av bevisrelaterade aktiviteter är det i så fall fråga om? Vilken typ av resonemang är det eleven förväntas genomföra?

Satser och bevis i genomgångar

Totalt har 126 satser som tas upp i läroböckernas genomgångar kategoriserats utifrån om de motiverats med ett giltigt bevis, med någon annan form av motivering, eller inte alls.

Staplarna i diagrammet visar andel satser och principer som bevisas, motiveras på annat sätt eller inte motiveras alls i de två svenska läromedlen Matematik 5000 och Origo samt i det finska Ellips. De fyra första grupperna av staplar illustrerar i tur och ordning innehållsområdena *logaritmer, primitiva funktioner, bestämda integraler* och *kombinatorik*. Den sista gruppen av staplar visar ackumulerade data.



Totalt är det inga stora skillnader mellan läromedelsserierna gällande hur stor andel av de principer som tas upp som också får någon slags motivering. En relativt stor andel (cirka 40 %) lämnas helt utan motivering (se den sista gruppen staplar i diagrammet). Det kan också vara värt att nämna att de allra flesta resultat som behandlas är beräkningsformler av olika slag och att de bevis och motiveringar som finns i huvudsak är direkta resonemang i form av algebraiska härledningar.

I de finska läromedlen är det vanligare att motiveringarna faktiskt är generella bevis. De är också ofta placerade *efter* själva satsen. I de svenska är det vanligare att en ny sats troliggörs med hjälp av ett exempel som är placerat *före* själva satsen. Ordet *bevis* förekommer i princip inte i de svenska böckerna. De finska har en mer formell framställning och de gör också tydligare skillnad mellan vad som är definition, sats och bevis.

Det kan tilläggas att i undersökningen av primitiva funktioner och bestämda integraler så utmärkte sig det finskspråkiga materialet Pitkä med att bevisa närmare 90 % av de satser och principer som togs upp.

Bevisrelaterade uppgifter

Med bevisrelaterade uppgifter avses de uppgifter som inbjuder till någon av de sju resonemangsaktiviteterna som beskrevs tidigare. Kategoriseringen har främst handlat om vilken typ av resonemangsaktivit en uppgift inbjuder till, men också om eleven måste resonera om ett generellt eller specifikt fall. Sammanlagt har närmare 3000 uppgifter analyserats.

			Typ av resonemangsaktivitet							
Läromedel	Uppgifter	BR	1	2	3	4	5	6	7	annat
Logaritmer										
M5000	144	11	2	3	4		2			
Origo	267	27	4	4	18		1			2
Ellips	135	6			6					
Primitiva funktioner										
M5000	82	19	1	9	8		1			
Origo	162	18	1	10	7					
Ellips	220	29		8	21					
Bestämda integraler										
M5000	313	50	9	23	17		1			
Origo	287	28	2	9	14	1	2			
Ellips	220	29		8	21					
Kombinatorik										
M5000	200	35		9	24	1				2
Origo	154	35	4	5	21	1	1			3
Ellips	88	6		1	5					

Tabellen visar antal uppgifter i de undersökta innehållsområdena, hur många som är bevisrelaterade (BR), samt de olika resonemangstyperna i respektive uppgift i de två svenska läromedlen Matematik 5000 och Origo, samt det finska Ellips.

Bevisrelaterade uppgifter (BR) är det relativt ont om, trots att de sju olika typerna av resonemangsaktiviteter innebär en vid tolkning av vad som är bevisrelaterat. De är dock vanligare i de svenska läromedlen än i de finska. Det som främst skiljer de svenska från de finska är att de finska har en större betoning på att utveckla argument (aktivitetstyp 3). I praktiken består dessa uppgifter till stor del av ”visa att”-uppgifter. Andelen sådana uppgifter som ber eleven att resonera kring ett generellt fall är också större i de finska läromedlen än i de svenska, men oavsett läromedelsserie är det i absoluta mått mätt få uppgifter där eleverna måste resonera om generella situationer.

De svenska läromedlen visar upp en större variation av resonemangsaktiviteter. Uppgifter om att formulera och undersöka hypoteser (aktivitetstyp 1 och 2) är vanligare i de svenska. En sak som är slående är att det inte fanns några uppgifter alls i det undersökta materialet där eleven uttryckligen ombeds att ge motexempel (aktivitetstyp 6).

Bevis och resonemang i undervisningen

Ett sätt att sammanfatta resultaten skulle kunna vara att de saker som forskningen visar att elever har svårigheter med är de som är sällsynta i läromedlen. Det kan låta som en kritisk kommentar om läromedlen men det är inte så jag vill att resultatet ska tolkas. Vi måste komma ihåg att ett läromedel ska jämka samman många olika syften. Som läromedelsförfattare måste man prioritera. Dessutom måste läromedlen möta lärares förväntningar. Eftersom bevis inte är tydligt framskrivna i läro- och kursplaner är det kanske inte så konstigt att de inte är framträdande i läromedlen heller. Ett annat sätt att se på resultaten är som en ren information om vad de ger eller inte ger stöd för. Den viktigaste insikten är då att en lärare som vill låta bevis och bevisrelaterade resonemang få en framskjuten plats i sin undervisning behöver hitta stöd för detta på andra ställen. Ett första steg kan vara att observera och reflektera över sin egen undervisningspraktik med särskilt fokus på just bevisrelaterade resonemang. Som avslutning vill jag därför ge två enkla verktyg som kan användas för att synliggöra vilka typer av bevisrelaterade aktiviteter och vilken typ av matematiska argument som är vanliga/ovanliga i den egna undervisningen. Jag tror att de är användbara på alla nivåer i skolan.

Fyra huvudtyper av bevisrelaterade aktiviteter

Istället för sju olika typer av bevisrelaterade resonemang så vill jag föreslå en uppdelning i fyra huvudtyper av bevisrelaterade aktiviteter:

- utveckla och precisera matematiska påståenden
- undersöka giltigheten i matematiska påståenden
- utveckla och precisera matematiska argument
- undersöka giltigheten i matematiska argument.

Dessa fyra går inte att helt skilja åt och det är inte meningen heller. I den mån läromedlen innehåller den här typen av aktiviteter verkar tonvikten vara på att utveckla matematiska argument.

Hur ser det ut i din undervisning? Får eleverna möjlighet att göra egna undersökningar för att upptäcka mönster och formulera egna påståenden om dem? Får de ibland matematiska påståenden som de själva får undersöka ifall de stämmer eller ej? Får de uppgifter där de ska förklara varför det är på det ena eller andra sättet, (be)visa att något gäller, eller precisera och korrigera ett resonemang? Får de tillfällen att sätta sig in i andras resonemang för att bedöma om de håller eller ej?

Jag kan inte säga hur stor andel av uppgifter och lektionsaktiviteter som bör innehålla något av detta eller vad den optimala fördelningen mellan de fyra typerna är. För att eleverna inte ska få en skev bild av vad matematiskt arbete är behöver alla fyra finnas med.

Tre huvudtyper av argument

I mina läroboksstudier har jag framförallt gjort skillnad på om argumenten vilat på specifika exempel eller generella fall. Man kan ju också tänka sig att läroboken själv hänvisar till någon form av matematisk auktoritet, exempelvis att ”Gauss bevisade att …”, eller bara uttrycker att ”man kan visa att” för att övertyga läsaren. Då har vi i princip en uppdelning av argument i de tre typer som Harel och Sowder kallar yttre argument, empiriska argument och deduktiva argument.

Vilka typer av argument används i ditt klassrum? Gå gärna runt och lyssna på eleverna när de jobbar i grupp, exempelvis under en problemlösningslektion. Ger eller efterfrågar de några skäl eller argument av varandra? Vilken typ? Med frågor som ”Hur vet du att det är så?”, ”Gäller det alltid?”, ”Blir det så även när …?” kan du hjälpa till att locka fram argument. Vilka typer av argument brukar du själv använda när du ska förklara eller motivera generella matematiska principer? Vilken typ brukar eleverna uppleva som mest övertygande?

Det här är viktigt eftersom just svårigheterna med att förstå skillnaden mellan vilka slutsatser man kan dra av enstaka exempel respektive av generella fall är bland de mest välbelagda i den matematikdidaktiska forskningen. Våra kunskapskrav uttrycker också att eleven ska kunna presentera underbyggda matematiska argument för sina slutsatser.

LITTERATUR

Bergwall, A. (2021). *Proof-related reasoning in upper secondary mathematics textbooks: Characteristics, comparisons, and conceptualizations* [Doktorsavhandling]. Mälardalen University.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. I F. K. Lester Jr. (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (sid 805–842). Information Age Publishing.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253–295.