BENGT ULIN

Att finna matematikspår i naturen

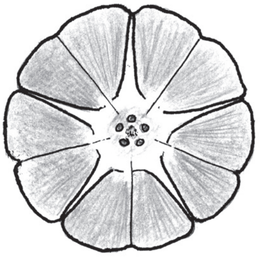
Matematiska uttryck i naturen kan bidra till att elevernas intresse för matematikarbetet ökar, om de får möjlighet att upptäcka dessa. I matematikens historia och i dagens naturvetenskap finns goda exempel på talsamband och former att använda i undervisningen.

Allt är tal hävdade som bekant pythagoréerna. Enligt deras övertygelse är kosmos konstituerat av de naturliga talen och proportioner mellan heltal. Märkligt nog utvecklade de en harmonilära många år innan de med sina monokord (ensträngade instrument) kunde bekräfta att t ex så enkla proportioner som 2:1 och 3:2, hos stränglängder svarade mot välljudande intervall, oktav respektive kvint.

Likt en återuppstånden pythagoré yttrade L Kronecker – mer än två årtusenden senare – de bland matematiker bevingade orden: *Gud skapade heltalen, allt annat är människans verk.* Man skulle alltså kunna säga att Pythagoras och Kronecker tillsammans ger ett argument för att vår herre är naturens skapare. Oavsett vad man vill finna för djupare orsaker till naturens företeelser råder det inget tvivel om att den uppvisar en mängd former och mönster av matematisk karaktär.

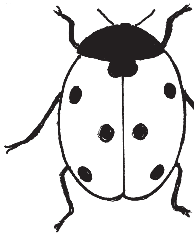
Skolmatematiken ska förvisso ses som ett övningsämne, där problemlösning och undersökande arbetssätt ger liv åt elevernas arbete. Liksom kroppen behöver vitaminer är även undervisningen beroende av vitaliserande inslag. Inslag som då och då orienterar eleverna om att matematik kan dyka upp i skiftande sammanhang; i teknik, måleri, musik, arkitektur, samhällsforskning och, inte minst, i studier av naturen. Om vi grovyxat skulle säga att en på djupet gående problemlösning (inklusive begreppsbildning) upptar 95 % av tiden, så skulle återstående 5 % i form av en ämnesbreddande orientering kunna vara av stort värde som impulsgivare, ibland även direkt som problemställare.

Universum … är skrivet på matematiskt språk, vars bokstäver är trianglar, cirklar och andra geometriska figurer, skrev Galilei i sin bok *Guldvågen* (1623) i genuin pythagoreisk anda. Sitt kanske starkaste stöd för detta yttrande har Galilei i växtvärlden. Vi ser varje vår och sommar blommande växter som vittnar om rotationssymmetri.



Snårvinda som exempel på radiär symmetri

Spegelsymmetri möter vi överallt: i vår egen gestalt, i djurens former och fjärilarnas mönster. Skalet hos bläckfisken *Pärlbåt* (Nautilus), uppvisar formfulländade logaritmspiraler liksom skalet hos många snäckor. Även ananasfrukten och barrträdens kottar ger exempel på vackra spiraler i rummet.

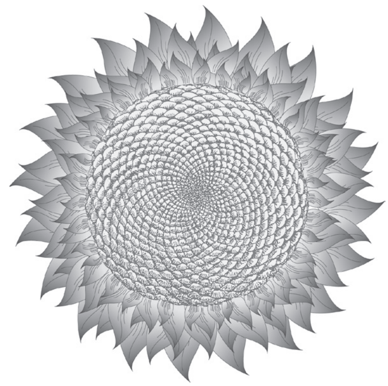


Nyckelpiga som exempel på spegelsymmetri hos insekter

Ofta förhåller det sig dock så att naturen inte visar all den matematik som företeelsen rymmer. I många fall döljer naturen den aritmetik eller geometri som ligger bakom formgivningen. Skalet hos ananasfrukterna visar ett nät av fyrkantiga rutor, som bildar spiraler mot toppen. Det finns ett system av spiraler med svag stigning, ett annat med brant stigning och en grupp spiraler vars stigning intar ett mellanläge mellan de två andra systemen. Om man räknar antalet spiraler runt om frukten med dessa tre olika lutningar finner man talen 5, 8 och 13, således tal tillhörande den talföljd som Fibonacci presenterade som lösning till ett klassiskt kaninproblem (1228). Fibonacci banade med sina böcker väg för de indoarabiska siffror som vi använder och den talföljd som fick namn efter honom är 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Varje tal fr o m det tredje är summan av de två närmast föregående.

Kepler, berömd för sina tre astronomiska ”lagar”, intresserade sig för Fibonacci-talen, men i stort sett var de försänkta i en törnrosasömn i 600 år, tills en tysk botaniker, A Braun, 1831 presenterade de s k bladbråken i växtvärlden. Hos många växter kan man räkna antalet blad i spiralen upp längs stjälken och notera ett bladbråk, bestämt av antalet varv och antalet blad innan riktningen hos ett blad ut från stjälken återkommer. Bladbråket kan sägas vara andelen av ett varv per blad i spiralen. Exempelvis har Rosaceae bladbråket 2/5, vilket innebär att bladriktningen återkommer efter 2 varv och 5 blad. De bladbråk som påvisades av Braun är 1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13 och 8/21; det sistnämnda bråket fann han allra först, nämligen hos kottar. Vi ser att bladbråken bildas av ett Fibonacci-tal som täljare och nästnästa Fibonacci-tal som nämnare.

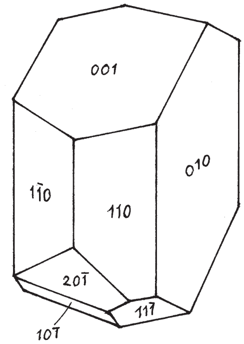
År 1907 visade G van Iterson genom mikroskopi att alla bladbråksväxter i sin vegetationskon, dvs där bladanlagen anläggs, uppvisar ett bladbråk som motsvarar gyllene snittets delning av ett varv (i cirka 137,5° och 222,5° av varvets 360°). Detta är omöjligt att se för det obeväpnade ögat. Däremot kan vi räkna antalet spiraler medsols och motsols i solrosornas frökorg och därvid finna just Fibonacci-tal. Pröva gärna i figuren.



Solroskorg

Världsrekordet i antalet spiraler innehas av en supersolros i Vermont, USA. Den hade 144 motsolsspiraler och 233 medsolsspiraler. Dessa förvånande stora tal ingår som tal nr 12 och 13 i Fibonacci-följden!

En stor och vacker grupp av naturobjekt med dolda tal finner vi bland kristallerna.



Anortitkristall med Miller-indices

Alltefter den grad av symmetri som de uppvisar är de indelade i olika kristallsystem och varje kristallyta är till sin orientering i ett valt koordinatsystem bestämd av en grupp om tre eller fyra siffror, ett s k Miller- eller Miller-Bravais-index. Kristallerna bildar en fascinerande värld som i likhet med begreppet symmetri är starkt eftersatt i våra skolor.

När kemisterna började bestämma grundämnenas atomvikter kunde de tvivla på den pythagoreiska filosofin att heltalen ligger till grund för kosmos. Men i och med upptäckten att grundämnena innehåller isotoper med varierande heltals-atomvikt fick pythagoréerna en upprättelse: atomvikterna får decimaler på grund av grundämnets isotopblandning.

I en bok med titeln *Matematisk design i naturen* vill jag dra en lans för att eleverna på högstadiet och än mer gymnasiet kan få vidgade perspektiv på skolmatematiken. Det var uppenbart att eleverna i Kristofferskolan i Bromma, där jag undervisade ett 40-tal år, uppskattade integration mellan matematik och andra ämnen. Om eleverna stiftat bekantskap med parabeln och vid en senare tidpunkt i fysikämnet lyckas identifiera kastkurvan som en parabelbåge, så känner de med all rätt glädje och stolthet. Det finns många andra exempel som stödjer den pythagoreiska övertygelsen att det som vi upptäcker som matematik i vårt inre kan vi återfinna vi i naturen.

Utöver former och mönster av aritmetisk eller geometrisk art har naturvetenskapen funnit samband som kan belysas algebraiskt. Ett exempel på detta är de ärftlighetslagar som Mendel upptäckte genom en imponerande systematisk forskning på ärtplantor. Helt andra former av mönster finner man hos djurs rörelser, himlakroppars banor och rytmer samt periodiska förlopp bland växter.

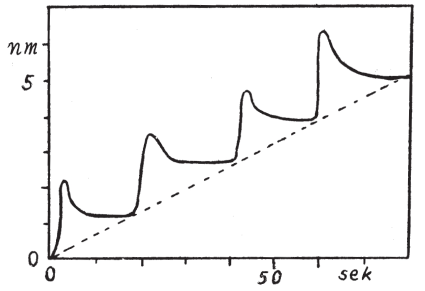


Diagram över rytmisk tillväxt hos en krokus

Till slut vill jag nämna ett exempel på talmönster (inte omnämnt i boken) som måste ha förbluffat den som (1885) fann mönstret. J J Balmer hade uppmätt våglängderna hos fyra linjer i vätets spektrum och funnit värdena 6562,1 Å, 4860,47 Å, 4340,1 Å och 4101,2 Å. (1 Ångströmenhet = en tiomiljondels mm). Balmer fann först att dessa fyra tal står i ett enkelt förhållande till talet 3645, nämligen

$$a = 9:5, \quad b = 4:3, \quad c = 25:21 \quad \text{resp } d = 9:8$$

Balmer lyckades därefter finna följande vackra heltalssamband mellan dessa tal:

$$a = \frac{9}{5} = \frac{3^2}{3^2 - 2^2} \qquad b = \frac{4}{3} = \frac{4^2}{4^2 - 2^2}$$

$$c = \frac{25}{21} = \frac{5^2}{5^2 - 2^2} \qquad d = \frac{9}{8} = \frac{6^2}{6^2 - 2^2}$$

Vi ser att proportionerna följer formeln

$$\frac{n^2}{n^2 - 2^2}\ ,\ 3 \le n \le 6$$

En vacker svit med kvadrattalen i huvudrollen!

LITTERATUR

Eliasson, Y. (2005). Att se på potatis med nya ögon. *Nämnaren* 32(2).

Newman, J R (red). (1965). *SIGMA*, bd 2, (antologi). Forum.

Stewart, I. (1998). *Life´s Other Secret*. Penguin Books.

Thompson, d´Arcy W. (1963). *On Growth and Form, vol 1–2*. Cambridge.

Ulin, B. (2007). *Matematisk design i naturen.* Telleby Bokförlag. ISBN: 978-91-89623-01-9