Jöran Petersson

Multiplikationstabeller och specialpedagogik

Författaren redovisar några specialpedagogiska funderingar kring undervisning om multiplikationstabeller och introducerar ett sätt att använda fingrarna för att multiplicera tal mellan 5 och 10.

Det finns åtminstone tre olika strategier för att lära sig hantera multiplikationstabeller. Samma strategier kan användas även till additions-, subtraktions- och divisionstabeller, formler med mera. Dessa är:

- att härleda dem
- att automatisera dem som glosor att kunna utantill
- att använda någon form av hjälpmedel som tabeller, formelsamling och tekniska hjälpmedel.

I denna artikel ska vi diskutera olika strategier och föreslå åtgärder ur ett specialpedagogiskt perspektiv. Men innan vi går in på åtgärderna börjar vi med orsakerna.

Orsaker

En del elevers svårigheter med matematik beror på att de har svårt att sålla bort ovidkommande intryck såsom ljus och ljud i olika former. Gunnar Sjöberg ger i sin doktorsavhandling exempel på elever som upplevde att deras matematiksvårigheter började på grund av brist på arbetsro – de upplevde sig störda redan tidigt i sin skolgång. Om man har svårt att sålla bort exempelvis ljudet från ventilationen, stolar som skrapar mot golvet och sorlet från klasskamrater, så måste man koncentrera sig extra hårt och en naturlig följdeffekt är att man blir trött i huvudet. Sjöberg noterade att detta blev särskilt graverande under långa pass – dessa elever orkade inte hålla sig koncentrerade lika länge som andra elever. I praktiken ledde det till att dessa elever fick mindre undervisningstid än övriga elever, trots att de satt i samma klassrum och egentligen behövde mer undervisningstid. En följdreaktion var att de nu uppkomna matematiksvårigheterna i sin tur ledde till stress- och ångestreaktioner i samband med matematik, vilket försämrade lärandemöjligheten ytterligare. Givet dessa orsaker, hur kan åtgärderna se ut?

Åtgärder i undervisningsformen

En sorts åtgärder kan handla om undervisningsform. I forskningslitteratur beskrivs ofta att eleverna får extraundervisning i mindre grupper. Undervisningen i mindre grupper kan antingen vara lärarstyrd eller elevstyrd. Lärarstyrd undervisning innebär att läraren berättar för elevgruppen hur de kan arbeta matematiskt. Elevstyrd undervisning innebär att eleverna får berätta för varandra hur de löser olika uppgiftstyper och lärarens funktion är att vara moderator – att leda och ibland styra samtalet – i denna diskussion.

Båda strategierna har sina fördelar. I specialgrupperna förefaller lärarstyrd undervisning vara något bättre för att automatisera fakta medan elevstyrd undervisning passar bättre för att lära sig resonera matematiskt och vid problemlösning, skriver Evelyn Kroesbergen och Johannes Van Luit. Men även åtgärder i undervisningsmiljön, såsom att extrapassen är korta och gruppstorleken är mindre, kan vara positiva för dessa elevers lärande, kanske just på grund av att i den mindre gruppen blir det färre syn- och hörselintryck att distraheras av.

Åtgärder i kunskapsformen

En annan sorts åtgärder kan handla om kunskapsformer. Psykologiskt inriktade forskningsartiklar pekar på goda resultat av att minnesträna *tabellfakta*, ungefär som glosor i främmande språk, några minuter i början och i slutet på varje skoldag under en termin.

Matematikdidaktiskt inriktade forskningsartiklar har *begreppsförståelse* som mål. Här uppmuntras eleverna att tänka högt – att språkligt berätta hur de resonerar matematiskt under problemlösningen. Sådan specialundervisning siktar ofta mot att dels lära sig multiplikation som upprepad addition (och division som upprepad subtraktion), dels lära sig använda talsamband såsom kommutativa lagen, associativa lagen genom dubblor (exempelvis att $4 \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 2$) och distributiva lagen (exempelvis att $9 \cdot 7 = (10 - 1) \cdot 7 = 70 - 7$) och på köpet få tabellerna automatiserade.

En tredje kunskapsform är att läraren frikostigt låter eleverna använda olika former av *hjälpmedel*.

Att undervisa enligt dessa tre kunskapsformer har stora likheter med tre olika perspektiv på matematikundervisning i flerspråkiga klassrum. Det handlar dels om att lära sig fakta i form av matematisk terminologi på det nya språket, dels om begreppsförståelse i form av att utveckla språkliga register, exempelvis att skilja på skala i musik respektive matematik och på att skala potatis. Det handlar också om transspråkande, i vilket man både språkväxlar och använder sig av icke-språklig kommunikation såsom gester, ritade figurer och tekniska hjälpmedel. Vi tar en närmre titt på dessa tre kunskapsformer.

Tabellfakta som kunskapsform

Läroplanen trycker starkt på förståelse och det är nog en nödvändig motvikt till att matematikundervisning, oavsett särskilda behov eller ej, delvis handlar om att memorera tabellkunskap. Utan tabellkunskap och automatiserade algoritmer skulle mycket av högre matematiskt tänkande – problemlösning, modellering, resonemang och mer avancerade begrepp – trängas ut ur arbetsminnet och inte få plats där på grund av ”tankebruset” från enkla aritmetiska beräkningar. En ekonomisk metafor för detta är att tabellfakta hushållar med arbetsminnets kapacitet. En nackdel med enbart tabellfakta är dock att endast numerisk representationsform är närvarande. Ett annat exempel är att även om elever har lärt sig multiplikation som förståelsekunskap men endast som upprepad addition, så blir även kommutativa lagen en utantillkunskap, som de inte förstår, det vill säga inte kan resonera om annat än det oegentliga resonemanget att konstatera att 4 treor och 3 fyror råkar ha samma summa och att detta råkar gälla samtliga produkter som de skulle få för sig att pröva.

Begreppsförståelse som kunskapsform

Kerstin Larsson betonar i sin doktorsavhandling att multiplikation är mer än upprepad addition. Betrakta produkterna $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$ och $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$. Den kommutativa lagen går inte att härleda ur enbart upprepad addition och med decimaltal fungerar inte upprepad addition alls. Jämfört med upprepad addition ger multiplikation i rutnät betydligt bättre stöd för att förstå räknelagar, positionssystem och närmevärden samt för att beräkna produkter av decimaltal, bråk och polynom, vilket jag tidigare skrivit om i artikeln *Multiplikation i rutnät*. En annan skillnad är att medan multiplikation som upprepad addition endast använder talsymboler som representationsform, så bygger multiplikation som rutnät på att numeriska och grafiska representationsformer samverkar. Raymond Duval gick så långt att han definierade förståelse som kunskapen att kunna växla mellan representationsformer. Därmed borde multiplikation i rutnät ha stort utrymme i specialundervisningen jämfört med upprepad addition.

Hjälpmedel som kunskapsform

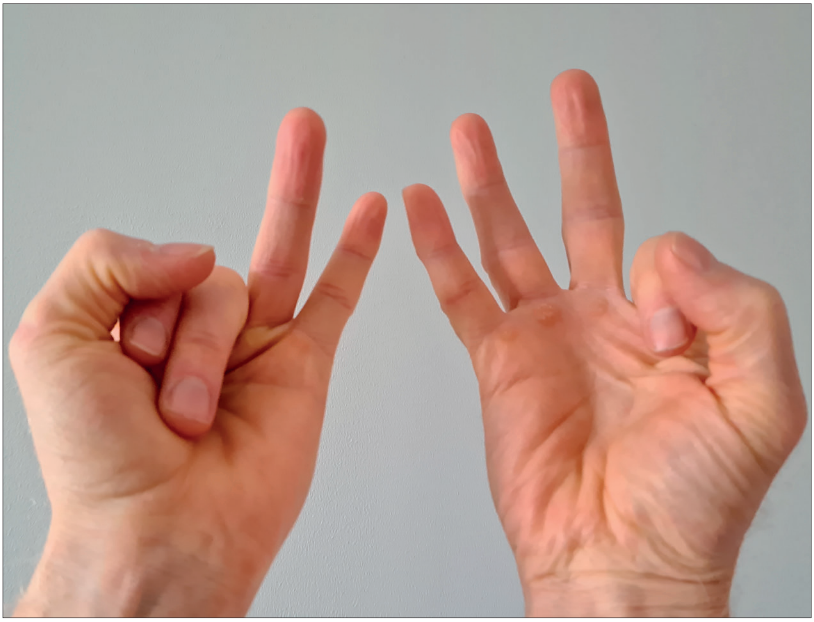
Det finns flera artiklar i Nämnaren som beskriver olika typer av hjälpmedel för den tidiga aritmetikundervisningen. I till exempel *Abakus – ett möjligt mattelyft?* berättar Pelle Lindblå om goda erfarenheter av att, som räkneverktyg, använda en abacus av den sorten som delar talen vid 5, exempelvis 7 som $5 + 2$. Susanne Lantz och Helena Roos skriver i artikeln *Strukturerad matematikundervisning i aritmetik* om bland annat Numicon-materialet för talmönster och grundläggande aritmetik. Vi kan också notera att i aritmetikens tidiga historia var fingeraritmetik uppenbarligen centralt. Betänk att i anatomin och på latin betyder ordet ”digit” fingrar och tår och att i stort sett alla språk i hela världen, med få och små undantag, använder 5, 10 eller 20 som bas, och att de antika romerska och egyptiska siffersymbolerna motsvarar utsträckta fingrar. Därför kan vi påstå att fingerräkning etymologiskt och bokstavligt sett är en digital teknik för att utföra beräkningar. Detta leder oss in på fingerräkningens roll, då fingrar är ett tillåtet hjälpmedel, som man dessutom har med sig i alla situationer. Vi behöver dock ett sätt att använda våra fingrar, så att det täcker hela talområdet 0–99.

Multiplikationstabellen på fingrarna

Här presenteras en metod för multiplikation med hjälp av fingrarna som fungerar när båda faktorerna är minst 5. Observera att eleverna måste behärska multiplikationstabeller upp till 5.

Vi illustrerar metoden med fallet $8 \cdot 7$.

1. Representera den första faktorn som tre nedvikta fingrar, alltså som $5+3$, på ena handen och den andra faktorn som två nedvikta fingrar, alltså $5+2$, på andra handen.



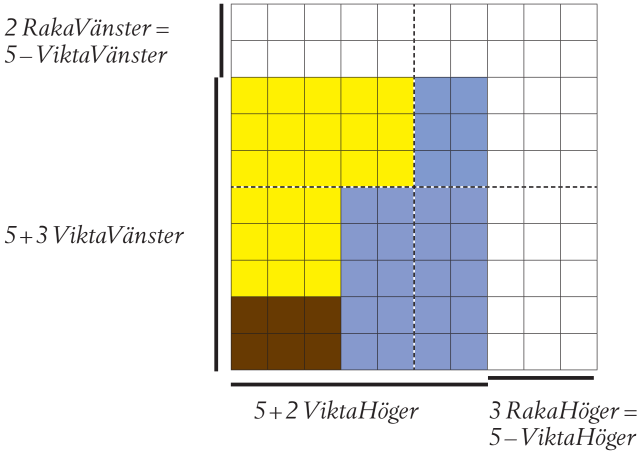
2. Multiplicera de raka fingrarna: $2 \cdot 3 = 6$.

3. Addera de vikta fingrarna $3+2=5$, det ska avläsas som 5 tiotal.

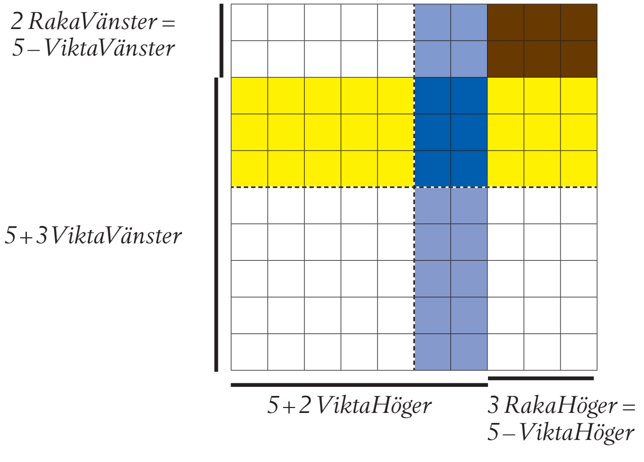
4. Addera därför $6+50=56$, som är produkten till $8 \cdot 7$.

Varför fungerar metoden? Det kan förklaras algebraiskt, men av två skäl ger jag istället en geometrisk förklaring. Dels passar det för elever som ännu inte är bekanta med algebra och dels blir en grafisk representationsform mer åskådlig. Tänk dig att vi ska multiplicera (5 + ViktaVänster) · (5 + ViktaHöger).

Vi placerar produkten i ett 10×10-rutsystem och markerar i det vad *raka fingrar* och 5 + *vikta fingrar* motsvarar, se det övre rutnätet på nästa sida. Färgmarkeringen använder vi för att undersöka vad fingermultiplikationen faktiskt innebär. Blått och gult kommer att bli tior medan brunt blir ental.



Det nedre rutnätet visar att den geometriska innebörden är att rotera de 5 x 5 rutorna i tredje kvadranten ett halvt varv till första kvadranten. Notera att de mörkblå rutorna då räknas två gånger eftersom de under vridningen får ett dubbelt lager, vilket blir särskilt tydligt om man gör detta med multilink-kuber eller (genomskinligt) papper. I bilden motsvaras varje vikt finger av en tia – det finns tre gula tior och två blå tior. Dessa adderas till fem tior. Den bruna rektangeln motsvarar produkten av de raka fingrarna: $2 \cdot 3 = 6$.



Ytterligare ett sätt att resonera är att se att multiplikationen $8 \cdot 7$ som är färglagt i den övre bilden består av: en 25-ruta i tredje kvadranten, tre gula femmor i andra kvadranten, två blå femmor i fjärde kvadranten och $3 \cdot 2 = 6$ blå rutor i första kvadranten, alltså $25 + 5 \cdot (3 + 2) + 6 = 25 + 25 + 6$. På köpet ingår även att eleverna här använder den distributiva lagen.

Hur fungerar då fingermultiplikation i klassrummet? Anna Åhlund, adjunkt i matematikdidaktik vid Stockholms universitet, har goda erfarenheter av det. Hon berättar att elever som behöver mycket tid för att lära sig tabellfakta har nytta av den bokstavligt talat digitala teknik som fingermultiplikation innebär.

Addition och subtraktion på fingrarna

Vi rundar av med ett sätt att representera talområdet 0–99 på fingrarna så att det kan användas för addition och subtraktion. Låt högerhanden representera ental och vänsterhanden tiotal, så att siffrorna kommer i vanlig läsordning. Ge fingrarna från lillfinger till tumme värdena från 1 till 5. Talen 6 till 9, uttrycks som 5 + överskott, alltså tumme + en av de andra fingrarna. Bilden visar talet 7 där fingrar motsvarande talet 5 + en nervikt 2:a. Ett sådant här system för fingerräkning används i Tanzania. Det fungerar för att addera och subtrahera inom talområdet 0–100.

Sammanfattning

Mycket av forskningen om hur man kan stödja elever med särskilda behov handlar om att i mindre grupper ge eleverna mer tid, men i övrigt samma utformning och innehåll i undervisningen vad det gäller faktaträning och förståelseundervisning. Denna artikel presenterar tekniska hjälpmedel i form av fingerräkning som ett alternativ. Om varje finger står för talet 1 är vi begränsade till talområdet 0–10, vilket är alldeles för litet. Metoderna ovan visar att det med mycket enkla metoder går att utvidga fingeraritmetiken till talområdet 0–100 och att det då krävs att vi använder fingrarna på ett mer abstrakt sätt än att endast ge varje finger värdet 1. Jämför med det antika Egyptens talsystem där talet 56 representerades med fem tior och sex ettor då de hade talsymboler (siffror) för tiopotenserna från 1 till 1 miljon men inte siffrorna 2–9. Därmed har vi med dessa mer avancerade former av fingerräkning bemött argumenten om begränsning i talområdet.

Ännu ett motargument är att begreppsförståelse ska prioriteras framför tabellfakta som kunskapsform, men som nämnts, så är tabellfakta nödvändiga för att ge plats i hjärnans arbetsminne åt högre matematiskt tänkande. Om tabellfakta sitter "i ryggmärgen" eller i fingrarna spelar i detta avseende mindre roll. Ytterligare en fördel med fingermultiplikationen är att dess förklaring bygger på multiplikation som rutnätsmodell, vilket bättre stödjer synen på multiplikationens egenskaper att vara kommutativ, associativ och distributiv än vad multiplikation som upprepad addition gör. Kanske är det också en fördel att den erbjuder en variation i representationsformer genom en fysisk representation som komplement till symbolisk/numerisk representation. Sammantaget är argumenten för en genomtänkt fingeraritmetik därmed något starkare än argumenten mot.

LITTERATUR

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

Kroesbergen, E. H. & Van Luit, J. E. (2002). Teaching multiplication to low math performers: Guided versus structured instruction. *Instructional Science, 30*(5), 361–378.

Lantz, S. & Roos, H. (2013). *Strukturerad intensivundervisning i aritmetik.* Nämnaren 2013:1.

Lindblå, P. (2012). *Abakus – ett möjligt mattelyft?* Nämnaren 2012:4.

Petersson, J. (2016). *Multiplikation i rutnät.* Nämnaren 2016:2.