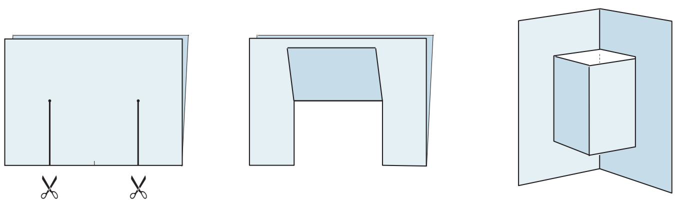
Lasse Berglund

Diskret geometri

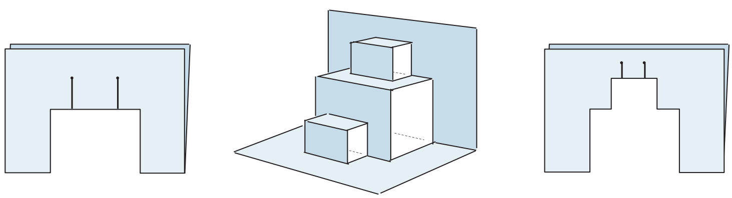
I de övningar vi här ska genomföra kommer vi att behöva papper, penna, linjal och sax. Trots dessa enkla hjälpmedel kommer det visa sig att vi ändå får ett gediget underlag för matematiska diskussioner i klassrummet, från lågstadium till gymnasium.

Vi tar ett A4-papper och viker det på mitten. Sidan med vecket delar vi i fyra lika långa delar och vid två av markeringarna klipper vi in halva sidbredden, se figur 1a. Den klippta delen viker vi nu först uppåt, sen tillbaka och inåt, liksom inverterar den, se figurer 1b och 1c.



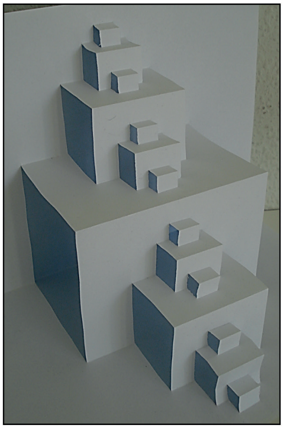
Figur 1a, b och c

Nu gör vi detta en gång till, exakt likadant. Så nästa steg ges av figur 2a följt av figur 2b, som visar den monotona principen; varje ny generation av veck ska inverteras. Inte sällan är det detta som utmärker en matematisk idé: man har hittat på en enkel regel som man sedan med sträng konsekvens håller sig till. Därmed skulle figur 2c bli nästa steg.



Figur 2a, b och c

I denna fas kan man säkert notera en viss förvåning i klassrummet då nån slags märklig trappa vecklar ut sig redan efter några få vikningar. Det har liksom kommit mer ut från processen än vad vi har lagt in, se figur 3.



Figur 3

Rikligt med begrepp och infallsvinklar

Om denna trappa är en så kallad *fraktal* får här vara osagt. Men det kommer att visa sig att den har många av fraktalens egenskaper, och som i alla rika problem kommer vi att finna nya perspektiv när vi vrider och vänder lite på frågorna. Följande begrepp kan man på ett naturligt sätt ta upp i klassrummet i anslutning till denna trappa:

- ✦ självupprepande strukturer
- ✦ talföljder, summor och serier
- ✦ symmetrier
- ✦ iterationer
- ✦ likformighet
- ✦ gränsvärden
- ✦ diskret vs kontinuerligt
- ✦ ändligt vs oändligt.

Självklart kommer man att tränga olika djupt i detta material beroende på i vilken årskurs man undervisar; lek och vardagliga resonemang räcker i många situationer, lite striktare betraktelser i andra.

Trappan på lågstadiet

För sju-åttaåringar är redan detta med att mäta med linjalen, vika och platta till en form av utmaning. Om inte annat så är det en aktivitet som balanserar upp deras skärmtid. Vissa är säkert inte intresserade av att räkna ut någonting. Det är roligt att klippa och vika helt enkelt. Gott så. Kanske någon tycker att pappfiguren är ett konstverk, trots att den egentligen inte föreställer något. ”Grejen är häftig” – trots att den är abstrakt. Eller är det konkret den är? Hur som helst; det finns om man så vill, en estetisk dimension i denna övning.

Någon elev börjar säkert att vandra med fingrarna uppför trappan och kommer enligt principen ett, två, tre, fyr ... fram till att det är 15 trappsteg totalt.

– Hur många stora klossar är det i trappan?
– En.
– Hur många mellanstora?

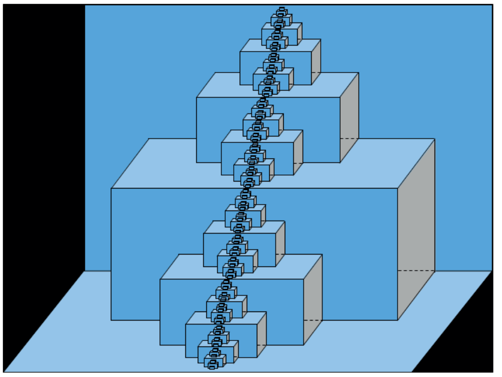
Här kanske ett nytt sätt att räkna infinner sig: $1+2+4+8=15$ och funderingar på hur många trappsteg det blir efter ytterligare en vikning är därmed uppe på tapeten.

En matematisk modell av papperskonstruktionen

Den mellanstadieelev som nu vill skapa en trappa med tusentals steg märker snart att praktiska aspekter sätter stopp för sådana vilda idéer. Pappret blir ju tjockare allt eftersom och det blir helt enkelt svårt att klippa. En teoretisk ansats kommer då som en naturlig följd och kanske en penna dyker upp.

Vikningar	Antal trappsteg
1	$1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$
3	$7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$
4	$15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$

Generaliseringen till n stycken vikningar, $2^n - 1$, finns inom räckhåll men får nog vänta till sjuan, åttan, nian. Trappan i figur 4 består av 127 trappsteg. För att ta reda på antalet vikningar i denna figur kan man till exempel ta sig vidare i tabellen ovan. Men detta antal kan man också få reda på genom att helt kort betrakta figuren.

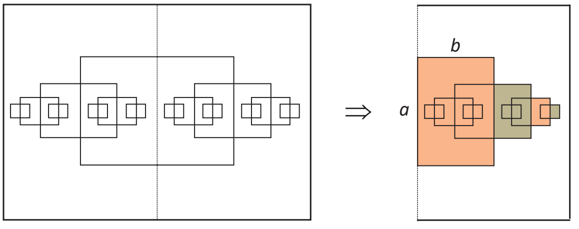


Figur 4. Trappa med 127 trappsteg. Figuren är ritad i Word i parallellprojektion.

Egenskaper hos trappan

Trappans area respektive volym är något man kan ta upp i klassen. Ännu intressantare är ändå kanske frågan: hur lång sträcka har vi egentligen klippt? Vi återkommer till den.

Hur stor trappans area blir kan vara en lämplig fråga att fundera över för en högstadieelev. Ett sätt att inleda sin undersökning är att platta ut pappret och betrakta de rektanglar som då visar sig, se figur 5a. Symmetrin gör att vi kan nöja oss med halva trappan, se figur 5b, där det också framgår att vi i denna halva har att göra med fyra pappersrektanglar.



Figur 5a och b

Den stora rektangeln med sidlängderna a och b är de första måtten vi tog. Dessa kan ju variera då man inte nödvändigtvis måste utgå från ett A4-papper. Så som klippkonstruktionen har gått till, är var och en av de färgade rektanglarna i figur 5b en fjärdedel så stor som den föregående. För denna del av trappan blir arean:

$$ab + \frac{ab}{4} + \frac{ab}{4\cdot 4} + \frac{ab}{4\cdot 4\cdot 4} = ab\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}\right) \qquad (1)$$

Med en faktor 2 och med summasymbolen om man så vill, får vi för våra fyra vikningar:

$$A_4 = 2ab\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{4^k} \approx 207\ \text{cm}^2 \text{ då } a \approx 10{,}5 \text{ cm och } b \approx 7{,}42 \text{ cm för ett A4-papper.}$$

Då mönstret nu framträder så pass tydligt, knappar en elev snabbt in i räknaren att arean, efter säg tio vikningar, blir 207,7 cm^2 och formulerar därefter säkert en hypotes: trappans area kan nog inte bli så mycket större, även om vi så viker tusen gånger.

Arean på en sluten form

En gymnasieelev kan i parentesen ovan känna igen en geometrisk summa med den konstanta kvoten 1/4. Med n stycken termer istället för 4 får vi mer generellt enligt den så kallade summa-formeln: $1 \cdot ((1/4)^n - 1)/(1/4 - 1)$ vilket tillsammans med faktorerna $2 \cdot a \cdot b$ kan förenklas till:

$$A_n = \frac{8ab}{3}\,(1 - 1/4^n) \qquad (2)$$

där n är antalet vikningar.

Vad ger denna för värde på arean efter enbart en vikning? Hur blir det om vi istället fortsätter att vika om och om igen? Funderingar kring processer som aldrig tar slut dyker nu upp på ett naturligt sätt. Vad händer med termen $1/4^n$ då n blir ett stort tal? Den försvinner till slut. Kvar blir $8ab(1-0)/3 = 8ab/3$ som är 207,76 cm² för våra värden, och som därmed bekräftar den hypotes som formulerades ovan: arean kan inte bli större.

Om man vill följa areans tillväxt

Då programmering är på frammarsch i den svenska skolan har vi här en kod, lämplig kanske på högstadiet. Språket är Python och man klarar sig utan att vara bekant med den slutna formen ovan. Programmet bygger istället på den ursprungliga formuleringen (1): detta är helt enkelt datorns sätt att säga samma sak.

Trappans area

```
a = float(input("Ange lengd: "))        # Float innebär att a blir ett decimaltal.
b = float(input("Ange bredd: "))
n = int(input("Ange antal vik: "))      # Int innebär att n blir ett heltal.
S = 0                                   # S är summan vi hade i parentesen.
for k in range(0,n):                    # En for-loop trampar på,
    S = S + 0.25**k                     #   så att summan växer till sig.
    print 2*a*b*S                       # Arean skrivs ut för varje vikning.
```

```
Ange lengd:  1.25      2.0
Ange bredd:  0.8       2.5
Ange antal vik:  5     2.625
                       2.65625
                       2.6640625
```

Trappans volym

Vill man göra en undersökning av trappans volym, så blir tillvägagångssättet i princip likadant som för arean ovan, även om man får vara försiktig så att man inte glömmer den antalsfaktor som denna gång ingår i var term. Man finner därefter att volymen V ges av:

$$V_4 = ab^2 + 2 \cdot \frac{ab^2}{8} + 4 \cdot \frac{ab^2}{8^2} + 8 \cdot \frac{ab^2}{8^3} \implies V_n = \frac{4ab^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \qquad (3)$$

och där n precis som innan är antalet vikningar. Man kan så klart låta första lådans volym V_1 vara 1 volymenhet, vilket då reducerar sambandet till $V_n = 4(1 - 1/4^n)/3$.

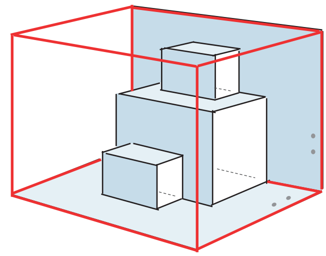
Trappans andel av det givna materialet

Hur stor andel trappan utgör av det rätblock som den är skapad ur – rött i figur 6 – kan också vara en fundering. Börjar eleverna med enbart en vikning, får de:

$$\frac{V_1}{V_{tot}} = \frac{ab^2}{2a \cdot 2b \cdot 2b} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

där de kan känna igen längdskalan i kub, vilket stämmer då trappan i detta tidiga läge också är ett rätblock, endast nedskalat. Utifrån sambandet (3) ovan, finner de kanske därefter:

$$\frac{V_n}{V_{tot}} \to \frac{1}{6} \text{ då } n \to \infty$$



Figur 6

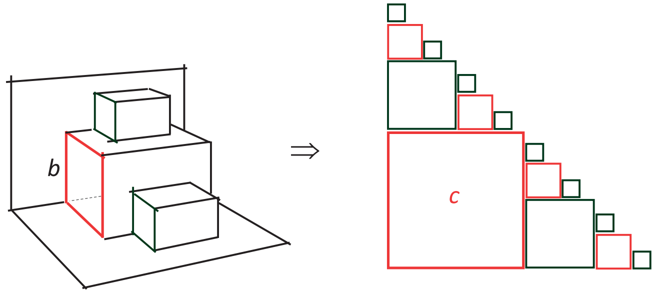
En likadan areabetraktelse kan man sen såklart också göra, och finna $\frac{A_n}{A_{tot}}$.

Ett förbryllande resultat

Nu undrar vi hur lång sträcka vi egentligen har klippt. Vi inledde med två klipp. Här fokuserar vi på ett av dessa klipp med längden b, se figur 7a där omkretsen $4b = c$ är den första klippta sträckan. Enligt konstruktionen halveras omkretsen för var figur, samtidigt som antalet fördubblas, se figur 7b. Alltså är den totala klippta sträckan S i samma figur:

$$S = c + 2 \cdot c/2 + 4 \cdot c/4 + 8 \cdot c/8 = c + c + c + c.$$

Med en faktor 2 på grund av två klipp var gång och med vårt värde $b = 7{,}42$ cm får vi: $2(29{,}7 + 29{,}7 + 29{,}7 + 29{,}7) \approx 237$ cm.



Figur 7a och b

Allmänt: $S = 2\sum_{k=1}^{n} c = 2(c + c + c + \ldots + c) = 2cn = 8bn$

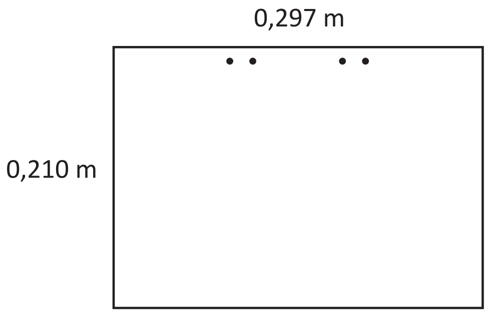
där n är antal vikningar.

Det framgår att den klippta sträckan S kan bli hur lång som helst bara faktorn n är tillräckligt stor. Så än en gång kommer oändligheten in i resonemanget men denna gång med ett helt annat resultat: trappans area kan som vi har sett aldrig överstiga 208 cm^2 medan längden av alla klipp kan sträcka sig hur långt ut i universum som helst. Dessa resultat kan säkert erbjuda en och annan diskussion i klassrummet.

En kommentar: Man kan räkna klippsträckan på ett annat sätt: hur långt har saxen rört sig? Då blir längden bara en fjärdedel, det vill säga $8bn/4 = 2bn$ som också det är en sträcka som kan bli hur lång som helst.

A-serien och dess proportioner

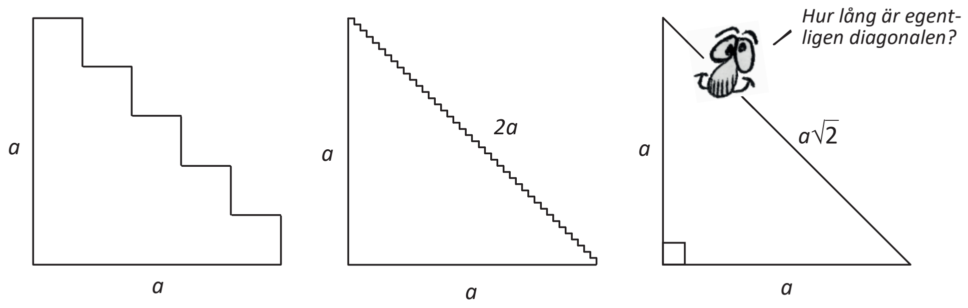
En annan konsekvens av konstruktionsprincipen är att A4-papprets proportioner kvarstår på samtliga trappsteg. A4-pappret har, som alla i den så kallade A-serien, det teoretiska värdet $a/b = \sqrt{2}$ där a och b är sidlängderna. De välbekanta värdena i figur 8 kommer av att A0-pappret har arean 1 m^2. De exakta värdena är $2^{-1,75} \approx 0{,}297$ respektive $2^{-2,25} \approx 0{,}210$. En undersökning av detta – likformiga rektanglar – kan kanske passa vissa elever.



Figur 8

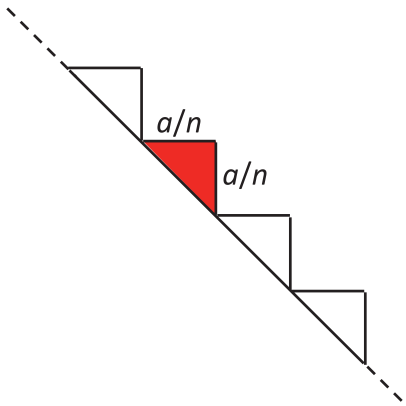
Hur är det egentligen med geometrin?

Låt oss nu fokusera på längden av själva trappan. Summan av alla trappsteg i såväl figur 9a som i 9b, får så klart längden $a + a = 2a$. Denna sträcka liknar efterhand mer en diagonal. Samtidigt har Pythagoras lärt oss att diagonalen i figur 9c är $a\sqrt{2}$ längdenheter. Så vad händer här: kommer trappan vid någon passage att krympa från $2a$ lång till att bara bli $1{,}4a$ lång?



Figur 9a, b och c

För att reda ut detta zoomar vi in trappan och tänker oss att vi har delat in den i n stycken steg. Då får varje steg längden a/n, se figur 10.



Figur 10

Längden vid ett trappsteg blir $a/n + a/n = 2a/n$ och för n stycken trappsteg får vi:

$$n \cdot \frac{2a}{n} = 2a$$

och vi ser att trappans längd fortfarande är $2a$, oberoende av n. Så även om antal steg är säg, en miljard, och vi därmed med blicken omöjligt kan skilja denna trappa från en rät linje, är trappan likväl $2a$ lång.

Vad vi här betraktar är två skilda geometrier helt enkelt. I det euklidiska fallet, figur 9c, konstateras som ett axiom, att mellan två punkter kan man dra en rät linje. I denna situation finns inga trappsteg. Trappan är något annat, den tillhör det diskreta. De två resultaten är helt enkelt korrekta i var sin teori med sina respektive uppsättningar av axiom och definitioner. Detta är inte märkligare än att vinkelsumman i en triangel i den euklidiska geometrin alltid är 180°, medan vinkelsumman i en triangel uppritad på till exempel en fotboll, alltid är större än 180°.

Om vi för jämförelsens skull också gör en areaberäkning får vi för den röda triangeln i figur 10:

$\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2n^2}$ Hela trappremsans area med n stycken trianglar blir då:

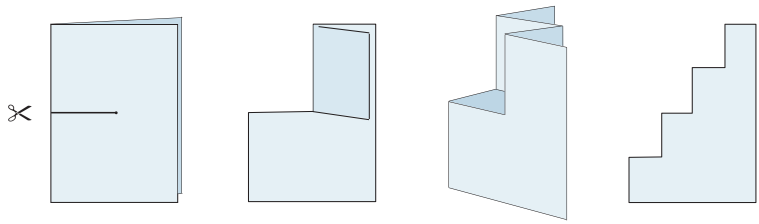
$n \cdot \frac{a^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ för ett fixerat värde på a.

Vi kan därmed konstatera att arean i figur 9b får samma storlek som triangelarean i figur 9c efter gränsövergång. Diagonalerna däremot, de skiljer sig fortfarande åt och kommer alltid att så göra. Trappsträckan kommer aldrig att krympa till $1{,}4a$.

Ytterligare några varianter

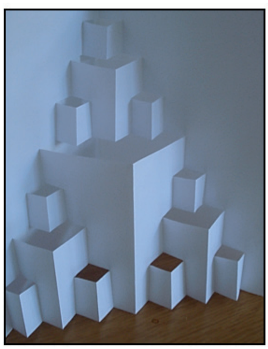
En fraktal pappfigur kan man klippa fram på ett antal olika sätt även om principerna är snarlika. I linje med den så kallade kaosteorin som uttalar att små initiala förändringar kan leda till stora skillnader i slutresultatet, avslutar vi med några exempel också på detta.

En variant som ger formen av en terrass visas i figur 11 och som följer de klipp- och vikprincip som vi hittills använt oss av, se också figur 12.

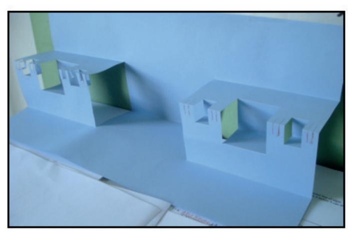


Figur 11

En tredje variant visas i figur 13, och som kanske är intressant för den som vill ge sig på att framställa den så kallade cantormängden som en klippkonstruktion; en *cantorsoffa*.



Figur 12. En fraktal terrass



Figur 13. En cantorsoffa

Som vi ovan konstaterat har dessa figurer många av fraktalens egenskaper. Med en fraktal följer också det intressanta fenomenet att dess dimension oftast anges av något annat än ett heltal. Denna fråga har här inte blivit utredd, och överlämnas därför till den intresserade läsaren: kan man säga något om vår trappas dimension?

REFERENSER

Brent Davis; University of Brittish Columbia, Vancouver.
Elaine Simmt; University of Alberta, Edmonton, NCTM.