

Representationer av tal i bråkform

I en studie har författaren undersökt hur lärare riktar uppmärksamhet mot och varierar olika aspekter av bråk. Resultatet mynnar ut i tre mönster av lärares handlande som har betydelse för vad elever kan få möjlighet att lära.

Som matematiklärare står du inför många komplexa situationer där du behöver göra val och fatta beslut som handlar om hur undervisningen ska organiseras, vilka exempel som ska användas och hur det matematiska innehållet ska representeras. Ett undervisningsinnehåll som visat sig särskilt komplext för lärare är att undervisa om tal i bråkform. Det är även det innehåll som elever uppgår som svårast att lära. Elevers kunskaper om tal i bråkform kan vara en avgörande faktor för kunskaper inom andra matematikområden, exempelvis algebra, och kunskapsbristerna kvarstår ofta under elevernas skolgång. Det är därför viktigt att i de tidigare skolorna ges eleverna goda förutsättningar att förstå tal i bråkform.

Jag har genomfört en studie där jag dels har undersökt hur lärare och elever använder laborativt material för att representera tal i bråkform, dels hur lärare använder och kopplar samman olika representationer och vad eleverna på detta sätt ges möjlighet att lära. Undersökningen genomfördes med hjälp av videoobservationer i cirka 30 matematikklassrum i årskurs 4–6. För att kunna beskriva och analysera skillnader i olika undervisningsstrategier om bråk och vad som eleverna gavs möjligt att lära användes variations-teorin som teoretiskt ramverk. Resultatet av min studie visar att när lärarna undervisar riktar de uppmärksamheten mot och varierar olika aspekter av tal i bråkform, vilket innebär att eleverna ges olika lärandemöjligheter.

Elevers kunskaper om tal i bråkform

Det finns flera orsaker till att elever kan ha svårt att förstå tal i bråkform. En sådan orsak handlar om hur talen ska tolkas. Tal i bråkform uttrycks på formen $\frac{a}{b}$, där a och b tillhör heltalen. Många elever har ofta flera års erfarenhet av heltal innan de får undervisning om tal i bråkform. Det finns en risk att dessa erfarenheter tar överhand när de tolkar tal i bråkform. Elevernas tidigare erfarenheter av heltal som självständiga tal kan komma att överskugga förståelsen av tal i bråkform som ett förhållande mellan talen a och b . Detta benämns som *the whole number bias* och kan exempelvis innebära att elever uppfattar bråkuttrycket $\frac{1}{4}$ som större än bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ eftersom 4 är större

än 3. För eleverna kan det på så sätt uppstå en konflikt mellan tidigare kunskaper om heltal och kunskaper om tal i bråkform.

Många elever kan korrekt lösa uppgifter som handlar om bråk som *kontinuerlig mängd*, exempelvis längd-, area och volymmodeller och bråk som *diskret mängd*, det vill säga att dela upp objekt i olika delmängder. För att lösa uppgifter som handlar om kontinuerlig mängd är det centralt att förstå att delarna är lika stora, vilket tidigare forskning visat inte alltid sker. Flera studier har dessutom visat att elever inte alltid uppfattar att bråkuttryck kan vara ekvivalenta. En förklaring till detta är att eleverna ser talet i nämnaren och täljaren som två separata tal och inte som en helhet. Att kunna förstå att tal är ekvivalenta är en förutsättning för att utveckla förståelse för att beräkna tal i bråkform.

Strategier för att jämföra bråk

Tidigare studier om tal i bråkform har undersökt vilka strategier elever använder för att jämföra två bråkuttryck. En av dessa strategier benämns som *mellanrumsstrategin* (gap thinking strategy). Med hjälp av strategin jämfördes exempelvis bråkuttrycken $\frac{3}{5}$ och $\frac{5}{8}$. Eleverna i studien menade att bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ var störst eftersom ”det är mindre gap”, det vill säga mindre skillnad mellan trean och femman i bråkuttrycket $\frac{3}{5}$ än mellan femman och åttan i bråkuttrycket $\frac{5}{8}$. Som en följd av denna lösningsstrategi trodde eleverna att bråkuttrycken $\frac{3}{4}$ och $\frac{2}{3}$ hade samma värde därför att det var samma ”gap” mellan täljaren och nämnaren i båda bråkuttrycken. Två andra lösningsstrategier som studerats kallas för *reststrategin* (residual thinking) respektive *referenspunktsstrategin* (benchmarking). Lösningsstrategin med resttänkande refererar till den mängd som behövs för att bråkuttrycket ska bli en hel. Exempelvis om bråkuttrycken $\frac{5}{6}$ och $\frac{7}{8}$ ska jämföras tänker en del elever att för att bråkuttrycket $\frac{5}{6}$ ska bli en hel så fattas det $\frac{1}{6}$ medan det fattas $\frac{1}{8}$ för att bråkuttrycket $\frac{7}{8}$ ska bli en hel. Eftersom $\frac{1}{8}$ är mindre än $\frac{1}{6}$ är bråkuttrycket $\frac{7}{8}$ störst. Referenspunktsstrategin innebär att för att jämföra två bråkuttryck används en referenspunkt, ett riktmärke, vanligtvis $\frac{1}{2}$ men även 1. För att avgöra vilket av bråkuttrycken $\frac{5}{8}$ och $\frac{3}{7}$ som är störst används referenspunkten $\frac{1}{2}$. Eftersom $\frac{5}{8}$ är större än $\frac{1}{2}$ och $\frac{3}{7}$ är mindre, så är $\frac{5}{8}$ större än $\frac{3}{7}$. Att använda någon av de två sistnämnda strategierna kan utgöra en länk mellan de informella strategierna till de mer formella strategierna. Det är dock viktigt att läraren kommunicerar och diskuterar strategierna med eleverna.

Att undervisa om tal i bråkform med hjälp av representationer

Flera forskare framhåller att lärares användning av representationsformer, så som vardagshändelser, laborativt material, bilder, muntligt och skriftligt språk, är särskilt fördelaktigt vid undervisning om tal i bråkform. En representation kan ensam representera ett matematiskt begrepp eller innehåll men en representation kan också ingå i ett system av flera andra representationer, ett representationssystem. Eftersom ingen enskild representationsform kan användas till alla matematiska begrepp behöver lärare välja ut den eller de

som är mest lämpliga för att representera det aktuella begreppet. Två olika representationsformer som kan användas för att representera tal i bråkform är bråkcirklar och tallinjer.

Bråkcirklar har visat sig vara ett gynnsamt val vid undervisning om att jämföra och storleksordna tal i bråkform. En förklaring till att bråkcirklar är fördelaktiga att använda i dessa sammanhang är att de stödjer elevers uppfattning om relationen mellan storleken av nämnaren och täljaren eftersom eleverna kan avläsa att ju fler delar en bråkcirkel är indelad i desto mindre blir delarna. Om bråkcirklar används för att jämföra två bråkuttryck är det viktigt att tänka på att bråkcirkelarna är kongruenta.

Tallinjen är en användbar representationsform vid undervisning om bråk som tal. När ett bråkuttryck placeras ut på en tallinje associeras bråkuttrycket till magnituden, det vill säga hur stort bråkuttrycket är. Genom detta kan lärare påvisa att man behöver ta hänsyn till både nämnaren och täljaren. Med hjälp av tallinjen kan lärare också visa att det mellan två bråktal finns oändligt många tal. Dessutom kan tallinjen användas i syfte att visa att olika bråk kan ha samma värde, som att $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Förutom att använda flera olika representationer är det av betydelse att eleverna ges möjlighet att förstå relationen mellan dem, det vill säga på vilket sätt representationerna kan kopplas samman. Växlingen och sammankopplingen mellan representationer hjälper elever att lättare skapa förståelse för och se samband mellan matematiska begrepp. Detta innebär att eleverna i matematikundervisningen behöver få många tillfällen att möta hur tal i bråkform representeras, exempelvis genom att rita olika bilder som representerar tal i bråkform, dela upp objekt i lika stora delar, namnge bråkuttryck och placera bråkuttryck på en tallinje. Genom lärares användning av representationer ges eleverna tillgång till de matematiska begreppen.

Resultat från studien

Resultatet från min studie visar att när lärarna undervisar riktar de uppmärksamheten mot och varierar olika aspekter av bråk, vilket innebär att eleverna ges olika möjligheter att lära om tal i bråkform. Tre mönster avseende lärares handlande som har betydelse för vad eleverna ges möjlighet att lära har framträtt. Dessa är:

- ♦ variation av innehållet
- ♦ användningen av representationer och hur olika representationer kopplas samman
- ♦ val av exempel.

Variation av innehållsliga aspekter

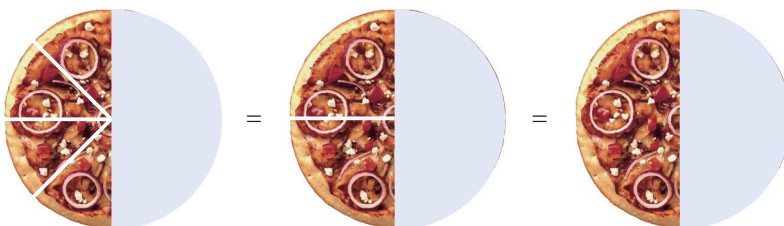
När lärarna undervisar om tal i bråkform varierar de innehållet på olika sätt. Framför allt handlar det om att de skapar kontraster för att eleverna ska ges möjlighet att urskilja det som ska läras. Genom att läraren använder kontraster ökar elevernas lärandemöjligheter utifrån ett grundantagande inom variationsteori att vi lär nytt genom att erfara skillnader. För att jämföra och storleksordna bråkuttryck kan läraren exempelvis låta nämnaren i bråkuttrycken variera medan täljaren i bråkuttrycken hålls invarianta (exempelvis $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$).

Om eleverna får uppleva att kontrasterna är synliga samtidigt underlättas elevernas möjlighet att lära sig om tal i bråkform. Denna typ av samtidighet kallas *synkron samtidighet*. När bråkuttrycken däremot visas var för sig vid olika tillfällen under lektionen, så kallad *diakron samtidighet*, behöver eleverna själva komma ihåg hur det först visade bråkuttrycket såg ut för att kunna relatera och kontrastera det med det sist visade bråkuttrycket. Detta kom till uttryck under en lektion när en lärare undervisade om hur ett bråkuttryck kan skrivas i blandad form. Först visades bråkuttrycket där täljaren var större än nämnaren och därefter raderades detta bråkuttryck innan den blandade formen presenterades. I den här typen av undervisningssituation lämnar läraren över ansvaret till eleverna att göra kontrasten och det finns då en risk att den inte medvetandegörs. Om kontrasten inte blir medvetet fokuserad kan den gå eleverna förbi. Kontrasten kan bli ottydlig, vilket kan försvåra elevernas möjlighet att lära.

Användandet av representationer och hur de kopplas samman

Resultatet visar också att när lärare undervisar om bråk använder de flera olika representationer. Ofta utgår de från en konkret representation för att senare använda mer abstrakta representationer, vilket tidigare forskning har visat vara gynnsamt för elevers lärande av bråk. De representationsformer som används för att representera bråk är bland annat laborativt material, bilder och skriftliga symboler. Beroende på hur och vilka representationer som används leder det till att elevers möjligheter att lära sig om tal i bråkform varierar. Exempelvis ges eleverna möjlighet att lära att alla bråkdelar som ingår i samma helhet måste vara lika stora genom att läraren kontrasterar två likadana kvadrater där delarnas storlek varierar, medan andra aspekter såsom form och antal delar hålls invarianta. I dessa undervisningssituationer skapas variation med hjälp av likadana representationer, vilket kan bidra till elevernas möjliga lärande.

Min studie visar även att lärare använder enbart skriftliga symboler, det vill säga abstrakta representationer, utan att först ha använt någon konkret representation. Även om läraren med hjälp av de skriftliga symbolerna skapar en kontrast kan det ge upphov till vissa problem för elevernas lärande eftersom deras förståelse inte först har förankrats med hjälp av konkreta representationer. Det är dock inte självklart att användandet av konkreta representationer skapar förutsättningar för att eleverna ska ges möjlighet att lära sig om bråk. Detta gäller exempelvis när undervisning om tal i bråkform bedrivs med hjälp av så kallade perceptuellt rika material, som i sig självt bär på egenskaper som kan leda eleverna bort från det matematiska innehållet eller idén som materialet är tänkt att representera. Det kan handla om att eleverna inkluderar representationernas egenskaper när de arbetar med uppgifter. Ett exempel på det är när en elev ska avgöra vilka bråkuttryck som är likvärdiga. Istället för att enbart fokusera på att det är förhållandet mellan täljaren och nämnaren i respektive bråkuttryck fokuserar eleven på representationernas utseende, vilket i det här fallet innebär att eleven även tar hänsyn till vilken "fyllning" som de olika pizzabitarerna har för att lösa uppgiften.



Pizzor kan uppfattas som perceptuellt rika representationer, vilket kan leda elever till att fokusera på fyllningen istället för bråkens egenskaper.

I dessa undervisningssituationer skapar de perceptuellt rika materialen en otydlighet avseende vad eleverna ska rikta uppmärksamheten mot.

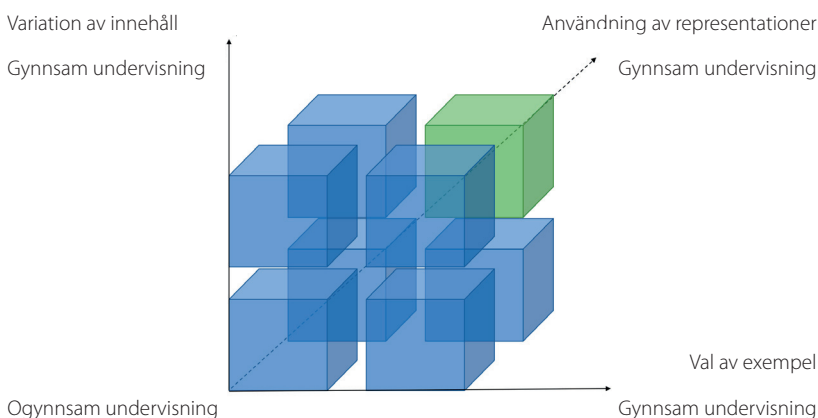
Studien visar dessutom att det inte räcker med att lärare fokuserar på vilka representationer och i vilken ordning de används. Centralt för elevernas lärande är också hur representationerna används och hur de sammankopplas. När flera representationer aktivt kopplas samman av läraren skapas ett representationssystem som ger eleverna möjlighet att lära om tal i bråkform. Sammankopplingarna sker företrädesvis på två olika sätt. Ett sätt är att de sker med hjälp av både verbala och icke verbala handlingar. Lärarna har i dessa undervisningssituationer möjlighet att beskriva och förklara likheter mellan olika representationer samtidigt som de exempelvis pekar på dem och riktar elevernas uppmärksamhet mot de innehållsliga aspekterna av tal i bråkform som de vill att eleverna ska fokusera. Ett andra sätt är att sammankopplingarna enbart sker med hjälp av verbala handlingar. Lärarna har då inte samma möjligheter att peka på och samtidigt förklara likheter mellan vad representationerna är tänkta att representera. Detta kan leda till att det blir otydligt vad eleverna ska urskilja.

Användandet av ett eller flera exempel

Ett tredje mönster som framträder i resultatet är att lärare undervisar om tal i bråkform genom att använda ett eller flera exempel. Beroende på hur många exempel som lärarna använder leder det till olika möjligheter för eleverna att lära om tal i bråkform. Genom att använda ett exempel kan elevernas möjligheter till generalisering begränsas. Detta sker exempelvis när läraren förklarar skillnaden mellan täljaren och nämnaren i ett bråkuttryck. I dessa situationer undervisar lärarna om hur en procedur ska genomföras för att lösa det enskilda exemplet. Resultaten visar också att lärare som använder sig av ett exempel ibland för resonemanget vidare, bort från det enskilda exemplet, mot en mer generell förklaring. Detta handlande kan bidra till att eleverna ges möjlighet att utvidga sitt lärande av tal i bråkform. Det visade exemplet och lärarens generella förklaring kan på så sätt bilda en helhet och kan betraktas som tillräckligt för att eleverna ska ges möjlighet att utvidga sitt erfärande av tal i bråkform. När lärare däremot använder flera sammanhängande exempel ges eleverna möjlighet att upptäcka både det specifika och det generella i det som undervisas. När lärarna använder flera uppsättningar av exempel ges eleverna en utvidgad möjlighet att erfara lärandeobjektet jämfört med när läraren endast använder ett enskilt exempel i undervisningssituationen.

Slutsatser

Det finns många aspekter och beslut att ta hänsyn till i samband med planering och undervisning av tal i bråkform i syfte att skapa gynnsamma förutsättningar för eleverna att lära sig bråk. Resultatet i min studie bidrar med att lyfta fram de tre beskrivna aspekter som visat sig främja elevers möjligheter att lära sig bråk. Dessa tre aspekter: variation av innehåll, användning av representationer och val av exempel, kan sammanfattas i nedanstående modell. Med hjälp av modellen kan man beskriva olika utfallsrum vad gäller vilka undervisningshandlingar som kan skapa gynnsamma förutsättningar för elevernas lärande. Modellen har tre dimensioner som var och en varierar mellan vilka undervisningshandlingar som kan skapa gynnsamma förutsättningar. Det innebär att det går att teckna åtta utfallsrum som vart och ett begreppsliggör olika typer av undervisningshandlingar relaterat till hur lärare använder representationer i undervisningen om tal i bråkform.



Modell som sammanfattar studiens resultat.

Gynnsamma förutsättningar, se grön kub i modellen, kännetecknas av att läraren varierar de innehållsliga aspekterna av tal i bråkform genom att skapa (synkrona) kontraster. En ytterligare förutsättning är att läraren med hjälp av både verbala och icke verbala handlingar aktivt kopplar samman de representationer som används för att representera lärandeobjektet, så att dessa representationer och kopplingar träder fram och kan urskiljas av eleverna. Slutligen är det gynnsamt när läraren använder flera exempel som presenteras för eleverna i genomtänkta och framträdande sekvenser. Genom att erbjuda eleverna sådana möjligheter i en undervisningssituation kan det skapa gynnsamma förutsättningar så att ett lärande av tal i bråkform kan ske.

LITTERATUR

- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.
- Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science*, 26(4).
- Sveider, C. (2021). *Representationer av tal i bråkform : En studie om matematikundervisning på mellanstadiet*. (PhD dissertation, Linköping University Electronic Press).