Niclas Larson

Tredimensionella figurer

Geometriska kroppar och deras inbördes relationer är inte alltid så självklara. Är den klassiska förpackningen med Toblerone ett prisma eller en cylinder? Här reder författaren ut de snåriga begreppen cylinder, prisma, kon och pyramid.

Det är nog välbekant att en kvadrat är en rektangel och att en rektangel är en parallellogram. Liknande relationer kan vi hitta bland de tredimensionella figurerna som ofta kallas för geometriska kroppar. Här ska vi titta lite närmare på dessa relationer.

I den preliminära versionen av grundskolans nya kursplan står som centralt innehåll för årskurs 1–3 *Grundläggande geometriska tvådimensionella objekt samt objekten klot, kon, cylinder och rätblock. Egenskaper hos dessa objekt och deras inbördes relationer.* För årskurs 4–6 står det *Grundläggande geometriska två- och tredimensionella objekt samt deras egenskaper och inbördes relationer.* För årskurs 7–9 formuleras det något kortare: *Geometriska objekt samt deras egenskaper och inbördes relationer.* Objektens inbördes relationer nämns alltså i samtliga tre stadier. I gymnasieskolans ämnesplan står det över huvud taget ingenting om geometriska kroppar, så det är framförallt i grundskolan som detta ska tas upp.

Cylinder

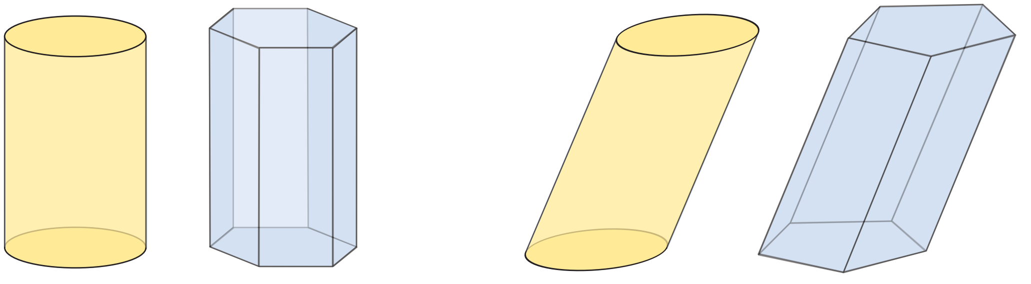
När vi i matematiken talar om cylinder, så är det nog många som föreställer sig en vanlig konservburk. Det är heller inte ovanligt att matematikböcker bara tar upp just denna form av cylinder, vilket signalerar att det är just en konservburken och inget annat som är en cylinder. Det stämmer att en konservburk är en cylinder, men det finns faktiskt många andra former som en cylinder kan ha.

Lite förenklat kan man säga att en cylinder är en kropp där basytorna (botten och topp) är kongruenta och parallella, och där varje tvärsnitt av kroppen, parallellt med basytorna, också är kongruent med dessa. Det här gäller förstås för cylindern som ser ut som en konservburk, men också för många andra kroppar. Lägg speciellt märke till att det inte finns någon beskrivning av basytornas form, vilket beror på att basytorna kan ha vilken form som helst, så länge de är ”platta”.

Det här betyder att ett prisma också är en cylinder. I ett prisma är ju botten och topp kongruenta. En cylinder kan också ha basytor som är stjärnformade, ovala eller har en oregelbunden form som inte har något speciellt namn. Det viktiga är att basytorna är parallella och kongruenta, och att varje parallellt tvärsnitt också är kongruent med dessa. Lite längre ner kommer vi att se på ännu ett villkor som måste vara uppfyllt, men vi väntar med det en stund. Prismer återkommer vi också till senare.

Rak och sned cylinder

På ungefär samma sätt som att vi nog ofta tänker på en cirkulär cylinder när vi i matematiken hör ordet cylinder, så tänker vi nog också att det är en rak cylinder. I en rak cylinder ligger toppen rakt ovanför botten, som i exempelvis en konservburk eller en vanlig kartong. Men det finns faktiskt inte något i definitionen av cylinder som säger att det måste vara på det sättet. Det viktiga är att basytorna är parallella (och kongruenta). I figur 1 finns två exempel på raka cylindrar och två exempel på sneda cylindrar.



Figur 1. Raka och sneda cylindrar.

De två gula cylindrarna kallas för en rak cirkulär cylinder respektive en sned cirkulär cylinder. Men som vi ser i de blå figurerna behöver inte basytorna i en cylinder vara cirklar så länge de är parallella och alla tvärsnitt är kongruenta.

Ytterligare ett villkor är att man ska kunna lägga en linjal längs sidoytan från botten till toppen på alla delar av sidoytan. Ett annat sätt att säga samma sak är att sidoytan består av sträckor som alla är parallella med varandra. Det betyder att en cylinder inte kan vrida sig som Turning Torso i Malmö. Sidoytan kan inte vara buktig eller ”åka slalom” mellan botten och toppen. Man måste kunna gå rakt upp, eller rakt upp på snedden, från botten till toppen.

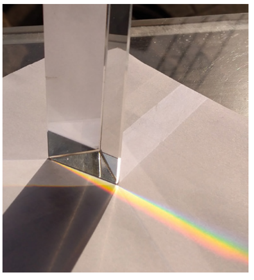
Volym och begränsningsarea för cylinder

En cylinders volym beräknas alltid genom att multiplicera basarean med höjden, alltså $V = Bh$. Höjden är det vinkelräta avståndet mellan basytorna. Hur man beräknar basarean beror förstås på basytans form. Därför kan det vara bäst att alltid utgå från formeln $V = Bh$. Den fungerar för alla cylindrar. Ser vi på specialfallet cirkulär cylinder, så får vi $V = \pi r^2 h$, eftersom $B = \pi r^2$.

Begränsningsarean för en cylinder får man genom att addera arean av de två basytorna (toppen och botten) med arean av sidoytan (eller sidoytorna). Arean av sidoytorna får man genom att multiplicera basytans omkrets med cylinderns höjd, eftersom sidoytan av en cylinder alltid kan ”klippas upp och vecklas ut till en parallellogram”. Parallellogrammen är en rektangel om det är en rak cylinder. För en cirkulär cylinder, där sidoytan kallas mantelyta, gäller därmed $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$.

Prisma

Många associerar nog prisma med ett glasprisma som bryter ljus till ett spektrum, där prismat har samma form som i figur 2. Man finner också en liknande bild på omslaget till ett av världens mest sålda musikalbum, The Dark Side of the Moon med Pink Floyd. Men vad är det som egentligen gäller för att en kropp ska vara ett prisma?



Figur 2. Glasprisma som bryter ljus.

Ett prisma är en cylinder där basytan är en månghörning, eller polygon som det också heter. Har man förstått vad en cylinder är, så behöver man faktiskt inte definiera prisma noggrannare än så. Automatiskt omfattas nu prismat av allt som gäller för en cylinder, med tillägget att basytan måste vara en månghörning. Prismat är alltså en speciell sorts cylinder.

Ett n-sidigt prisma

En vanlig kartong är ett prisma och förstås en cylinder. Närmare bestämt är kartongen ett fyrsidigt prisma, eller ett rektangulärt prisma. Ska vi vara ännu noggrannare så är kartongen ett rakt fyrsidigt prisma. I figur 1 finns ett rakt sexsidigt prisma och ett snett femsidigt prisma. Glasprismat i figur 2 och Tobleroneasken i figur 3 är tresidiga prismer, eller mer noggrant raka tresidiga prismer.

Eftersom basytan i ett prisma är en månghörning, så kan basytan i ett prisma också vara stjärnformad. Eller ha formen av ett parallelltrapets. Eller vara L-formad. Kort sagt, basytan kan vara vilken månghörning som helst. Ett n-sidigt prisma har n sidoytor. Sidoytorna är alltid parallellogrammer, och om det är ett rakt prisma så är sidoytorna rektanglar.

Figur 3. Rakt tresidigt prisma.

Prismats volym och area

Eftersom ett prisma är en cylinder, så gäller naturligtvis samma volymformel för prismat som för cylindern, $V = Bh$. Ser vi på specialfallet rakt rektangulärt prisma (t ex en kartong) så är basarean $B = l \cdot b$, där l är basytans längd och b dess bredd. Så volymen är $V = Bh = l \cdot b \cdot h$, en formel som du nog har sett tidigare. Begränsningsarean får man som tidigare genom att summera areorna för sidoytorna och de två basytorna.

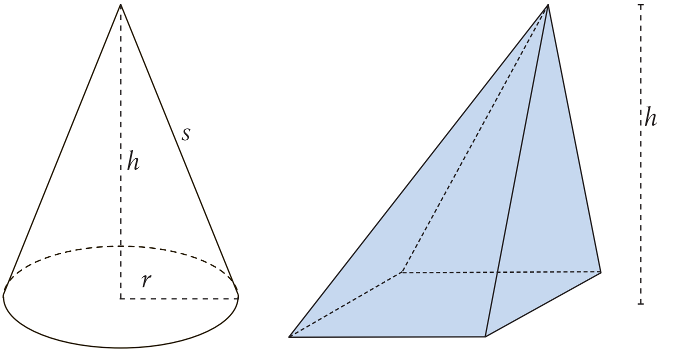
Kon

Om vi tänker på en kon är det nog många som ser framför sig det som noggrannare sagt heter en rak cirkulär kon, se till vänster i figur 4. Alltså ungefär som en stjärngossestrut eller en vanlig orangeröd trafikkon. Men på samma sätt som för cylindern, så kan basytan till en kon ha många olika former.

Det viktiga är att det måste finnas en platt basyta och att det från basytan går upp sidoytor till en gemensam spets. Dessutom måste varje tvärsnitt av konen, parallellt med basytan, vara likformigt med basytan. På samma sätt som för en cylinder, så ska man kunna lägga en linjal längs konens sida från basytan till spetsen. Det betyder att en kon inte kan vara skruvad, och således inte vara en spetsig version av Turning Torso.

Rak och sned kon

På samma sätt som för en cylinder, så finns det raka och sneda koner. Tar vi exemplet med en cirkulär kon, så är den rak om spetsen ligger rakt ovanför basytans medelpunkt. I annat fall är konen sned. I figur 4 ser vi en rak cirkulär kon till vänster och en sned kon till höger. Koner av typen till höger ska vi strax återkomma till.



Figur 4. Rak och sned kon.

Konens volym och area

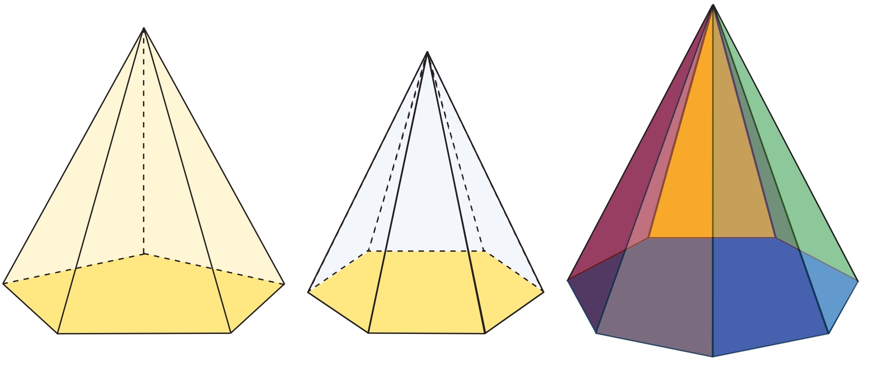
Om en cylinder och en kon har samma basarea och samma höjd, så är konens volym en tredjedel av cylinderns. Eftersom cylinderns volym är $V = Bh$, betyder det att konens volym är $V = Bh/3$. Detta gäller oberoende av basytans form eller om det är en rak eller sned kon. Höjden är det vinkelräta avståndet från spetsen till basytan, se t ex den vänstra konen i figur 4. För en sned kon är det inte säkert att spetsen ligger ovanför basytan, dvs höjden faller utanför basytan. Då är höjden det vinkelräta avståndet från spetsen till planet som basytan ligger i.

Det kan vara svårare att bestämma arean av sidoytorna. Men för en rak cirkulär kon är $A = \pi rs$, där r är basytans radie och s är avståndet från spetsen längs sidoytan ned till basytans kant. Med hjälp av Pythagoras sats kan vi också uttrycka detta som $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Vill vi ha hela begränsningsytan för en rak cirkulär kon, så adderar vi med arean av den cirkelformade basytan.

Pyramid

Relationen mellan kon och pyramid motsvarar den mellan cylinder och prisma. En pyramid är helt enkelt en kon där basytan är en månghörning. Det betyder att kroppen till höger i figur 4 är en sned pyramid, eller noggrannare sagt en sned fyrsidig pyramid.

På samma sätt som för prismat kan basytan i en pyramid ha olika former. Det viktiga är att den är en månghörning. I figur 5 ser vi fem-, sex- och sjusidiga pyramider. Som vi kan se i figur 4 till höger och i figur 5, så är sidoytorna i en pyramid trianglar. Om det är en rak pyramid, som alla pyramiderna i figur 5, så är trianglarna likbenta. Eftersom pyramiden är ett specialfall av konen, så beräknas volymen på samma sätt. Vi räknar först ut basarean B och så använder vi formeln $V = Bh/3$. Pyramidens begränsningsarea får vi genom att addera basarean med arean av alla trianglar som utgör sidoytorna.



Figur 5. Femsidig, sexsidig och sjusidig pyramid.

Avslutande reflektioner

Hur geometriska kroppar ska behandlas i undervisningen är rimligtvis upp till varje lärare eller skola att avgöra. Kursplanen säger ju inte specifikt vilka kroppar som ska tas upp, undantaget åk 1–3, hur relationerna mellan dem ska betonas eller hur detaljerad man ska vara i sin undervisning. Det finns för övrigt också detaljer i definitionerna som har utelämnats i den här texten. Genom att själv ha en god kunskap om geometriska kroppar och deras relation till varandra, är det rimligtvis lättare att planera och fatta lämpliga beslut i sin undervisning. Det blir förmodligen också lättare att svara på frågor av typen ”varför heter det ibland rak cirkulär cylinder, måste inte en cylinder vara cirkulär och finns det cylindrar som är sneda”, som någon nyfiken elev kan ställa. En av förhoppningarna med denna genomgång är att det kan ge några idéer om hur man kan tackla sådana frågor.

LITTERATUR

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2009). *Matematiktermer för skolan* (s 219–239). NCM, Göteborgs universitet.