Sagt & gjort

Träddiagram

I vår undervisning av blivande lärare har vi ofta använt träddiagram för att illustrera sannolikheter och sedan kopplat ihop det med algebra. Här ska vi visa hur ett träddiagram används i ett grundläggande problem. I en kommande text ska vi visa hur samma idé kan illustrera kvadreringsregeln och kubregeln.

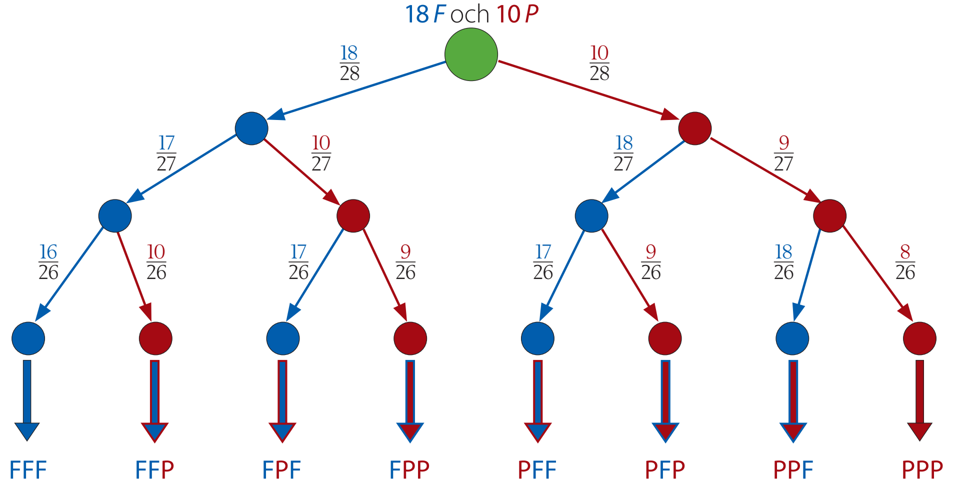
Ett träddiagram är en matematisk modell som hjälper oss att bena upp och visualisera hur ofta olika alternativ kan inträffa. Finns det två alternativ så förgrenar sig trädet uppifrån i två grenar och för varje nytt val förgrenar sig respektive gren återigen i två tills vi säger stopp.

> I en klass finns det 18 flickor och 10 pojkar. Om vi ska välja ut en grupp på tre elever går det inte att få en jämn fördelning. Om vi väljer slumpmässigt, hur stor är då sannolikheten för olika fördelningar i en grupp på tre elever?

Många gånger innehåller frågeställningarna ord som specificerar valet, exempelvis *minst*, *högst* eller *exakt*. Här ställer vi tre frågor som berör samma uppgift men som frågar efter olika resultat.

> Hur stor sannolikhet är det att det i en slumpvis vald grupp på tre elever blir
> a. *exakt* två flickor?
> b. *högst* två flickor?
> c. *minst* två flickor?

Först ritar vi ett träddiagram över händelserna och skriver ut sannolikheterna i bråkform. Vid första förgreningen är nämnaren 28 eftersom det är 28 elever totalt. När en är vald är det 27 kvar så i andra förgreningen är nämnaren 27 och i tredje förgreningen är nämnaren 26. Därefter är tre elever valda och 25 elever återstår. Vi kan också kontrollera att summan av talen på täljarna vid varje utfall är lika med deras gemensamma nämnare.



Vi räknar nu på sannolikheten för olika utfall genom att använda multiplikationsprincipen.

I. $P(3\,flickor)=\frac{18}{28}\cdot\frac{17}{27}\cdot\frac{16}{26}=\frac{9}{14}\cdot\frac{17}{27}\cdot\frac{8}{13}=\frac{17\cdot 4}{7\cdot 3\cdot 13}=\frac{68}{273}\approx 0{,}2491=\mathbf{24{,}91}\,\%$

II. $P(3\,pojkar)=\frac{10}{28}\cdot\frac{9}{27}\cdot\frac{8}{26}=\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{13}=\frac{5\cdot 4}{14\cdot 3\cdot 13}=\frac{20}{546}\approx 0{,}0366=\mathbf{3{,}66}\,\%$

III. $P(1P+2F)=P(PFF)+P(FPF)+P(FFP)=$

$$\frac{10}{28}\cdot\frac{18}{27}\cdot\frac{17}{26}+\frac{18}{28}\cdot\frac{10}{27}\cdot\frac{17}{26}+\frac{18}{28}\cdot\frac{17}{27}\cdot\frac{10}{26}=$$

$$\frac{3(10\cdot 18\cdot 17)}{28\cdot 27\cdot 26}=\frac{5\cdot 17}{26\cdot 7}=\frac{85}{182}\approx 0{,}4670=\mathbf{46{,}70}\,\%$$

IV. $P(2P+1F)=P(PPF)+P(PFP)+P(FPP)=$

$$\frac{10}{28}\cdot\frac{9}{27}\cdot\frac{18}{26}+\frac{10}{28}\cdot\frac{18}{27}\cdot\frac{9}{26}+\frac{18}{28}\cdot\frac{10}{27}\cdot\frac{9}{26}=\frac{3(9\cdot 10\cdot 18)}{28\cdot 27\cdot 26}=\frac{5\cdot 9}{26\cdot 7}=\frac{45}{182}\approx$$

$$0{,}2473=\mathbf{24{,}73}\,\%$$

Vi kan kontrollera att vi har räknat rätt genom att addera alla resultat som sammanlagt bör vara ungefär 100 %:

$$24{,}91\,\%+3{,}66\,\%+46{,}70\,\%+24{,}73\,\%=100\,\%$$

a. Vad är sannolikheten att av de tre valda eleverna är det *exakt* två flickor? Exakt två flickor är det bara i grenarna som slutar med två F och ett P, alltså summan i **III** ovan.

$$P(1P+2F)=P(PFF)+P(FPF)+P(FFP)\approx 46{,}70\,\%$$

b. Vad är sannolikheten att av de tre valda eleverna är det *högst* två flickor? Ordet *högst* begränsar antalet uppåt, men innehåller även alla antal som är mindre än det högsta antalet i frågan. Här innebär det summan av de grenar där antalat flickor ≤ 2, alltså summan av **II** + **III** + **IV**:

$$P(3P+0F)+P(1P+2F)+P(2P+1F)=3{,}66\,\%+46{,}70\,\%+24{,}73\,\%=75{,}09\,\%$$

c. Vad är sannolikheten att av de tre valda eleverna är det *minst* två flickor? Ordet *minst* är motsatsen till *högst*; det vill säga antalet är begränsat nedåt och motsvarar summan av de grenar där antalat flickor ≥ 2, alltså summan av **I** och **III**.

$$P(FFF)+\mathrm{P}(1P+2F)=24{,}91\,\%+46{,}70\,\%=71{,}61\,\%$$

Russell Hatami & Ali Ludvigsen