Lärartankar

Aritmetik med negativa tal

– teckenregler eller teckenresonemang?

I Nämnaren 2015:3 efterlyste Björn Enare alternativa matematiska resonemang om teckenregler. Jag ger här en kort framställning i detta viktiga område och börjar med etymologi. Det latinska ursprunget för ordet *subtraktion* är ordagrant *undan-dragande*. Ordet *differens* med den latinska roten *dis-fero* har den bokstavliga lydelsen *itu-förande; åt-skiljande* med överförd betydelse av jämförelse, olikhet och skillnad.

Kerstin Larsson sammanfattar i Nämnaren 2011:4 överskådligt Karen Fusons fyra didaktiska modeller för subtraktion. Sammanställningen nedan visar hur de dynamiska situationerna ”minska” och ”öka” kan omformuleras till en statisk jämförelse. Pengastaplarna i sammanställningen illustrerar ”hur mycket över” respektive ”hur mycket mer” den vänstra stapeln är jämfört med den högra. Att ta bort ger därför samma numeriska svar som att undersöka skillnaden i ett stapeldiagram.

Cecilia Kilhamn har i flera artiklar i Nämnaren understrukit de didaktiska fördelarna med att använda tallinjen. För fallet differens, se artikel i 2014:3. Se även Ingvar O Perssons artikel i 2007:3.

Definition: Differensen A–B är talpilen (vektorn, det riktade avståndet) från punkten B till punkten A.

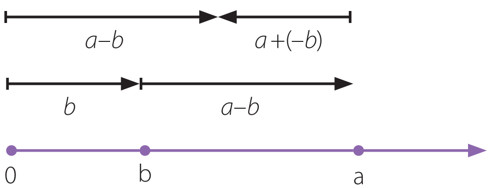
På tallinjen blir differensen 5–(-3) åtta steg framåt från (-3) till 5 och differensen (-3)–5 åtta steg bakåt från 5 till (-3). Därmed behövs inga icke-matematiska teckenregler eftersom det med hjälp av talpilen på tallinjen tydligt och synligt går att matematiskt resonera sig fram till differensens tecken. Det finns också goda skäl att tro att dyslektiker, andraspråkselever och matematiktrötta elever har större hjälp av visuellt matematiskt resonemang jämfört med icke-matematiska minnesregler grundade på vaga och icke-matematematiska resonemang, så som Cecilia Kilhamn har beskrivit i sin doktorsavhandling.

I Nämnaren 2012:1 överblickar Kerstin Larsson vad forskare säger om olika räknestrategier för subtraktion. Den säkraste strategin är subtraktion ”på den tomma tallinjen”, alltså inte lodräta eller talsortsvisa algoritmer. Den enda nackdel som hon nämner är att positionssystemet inte blir synliggjort.

Dynamisk situation	***Minska*** ”Hans har 17 kronor och köper en glass för 9 kr. Hur mycket pengar har han kvar efter köpet?”	***Öka*** ”Greta har 9 kronor och får några kronor så att hon nu har 17 kr. Hur mycket fick hon?”
Statisk situation	***Del-hel*** ”Hans har 17 kronor och ska köpa en glass för 9 kr. Hur mycket pengar har han över om han köper glassen?”	***Jämförelse*** ”Greta hade först 9 kronor. Sedan hade hon 17 kr. Hur mycket mer har hon nu?”

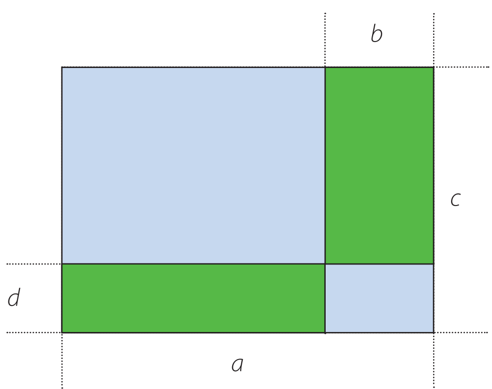
Min egen förmodan är att det påståendet främst beror på att subtraktion på den tomma tallinjen används för lite utanför talområdet 0–20. Om subtraktioner mellan flersiffriga tal illustreras på en tom tallinje blir det nödvändigt att möta positionssystemet.

Notera en viktig skillnad mellan addition och subtraktion som talpilar på tallinjen: Additionen $a+b+c$ innebär att flera talpilar bildar en kedja ”svans i spets” från origo till summan $a+b+c$ medan det i differens förekommer exakt två punkter och exakt en talpil från subtrahend b till minuend a. Denna skillnad i framställning använder vi för att visa att $a+(-b)=a-b$.



I figuren delas sträckan från 0 till a på två sätt. Överst som $(a-b)$ och resultantvektorn $a+(-b)$ och i mitten som b och differensvektorn $a-b$. Vi ser att båda sätten delar upp sträckan 0 till a i en del med längden b och en rest som måste ha samma längd i båda fallen, alltså $a-b=a+(-b)$.

Hur är det då med tecken på produkten av (-5)(-3)? Jo, här fungerar geometrisk algebra utmärkt. Vi tänker oss en rektangel i fyra delar.



Vi ska beräkna arean på den gröna delen i figuren. Det kan vi göra på flera sätt och här jämför vi två av dem:

1. Som produkten av höjden $(c-d)$ och basen $(a-b)$ som vi skriver om i ekvationen
   Area $=(a-b)(c-d)=(a+(-b))(c+(-d))=$
   $ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d)$.
2. Som fyra delar av hela rektangeln
   Area $=ac-ad-bc+bd$.

I den andra ekvationen beräknas arean som hela rektangeln ac minus remsorna ad och bc. Men då har vi tagit bort rutan bd två gånger eftersom den finns med i båda remsorna (detta blir mycket tydligt om man klipper figuren i papper). Vi får kompensera det genom att lägga tillbaka den en gång, dvs addera produkten bd. Nu är det bara att identifiera delprodukterna i de två ekvationernas sista led och jämföra delprodukternas tecken. Då finner vi att $a(-d)=-ad$ och $(-b)(-d)=bd$.

Matematiska alternativ till de beskrivna visuella resonemangen om teckenregler för subtraktion och multiplikation med negativa tal är att troliggöra teckenreglerna med talmönster i exempelvis produkterna $3\cdot2$; $3\cdot1$; $3\cdot0$; $3\cdot(-1)$ etc, eller att arbeta med inskjutna nollor och motsatta tal, som Ingvar O Persson tar upp i Nämnaren 2007:3 och Björn Enare i Nämnaren 2015:3. Negativa tals differens på tallinjen och produkt med rektangeln, som visades i figurerna, erbjuder matematiskt likvärdiga men didaktiskt mer lättillgängliga alternativ.

Jöran Petersson