Thomas Lingefjärd & Güner Ahmet

Gyllene snittet med Geogebra

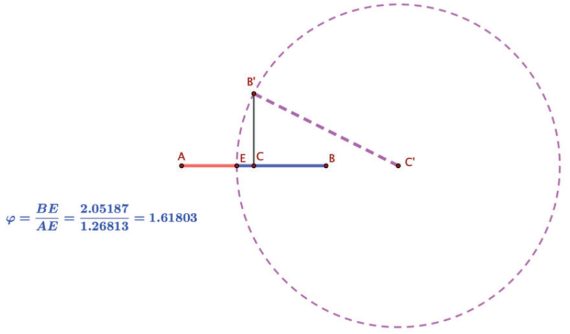
Alla elever har säkert hört sina matematiklärare säga att matematik är mer än att bara räkna, det finns vackra mönster och spännande samband att upptäcka. Det gyllene snittet och Fibonaccis talföljd hör till de exempel som är just vackra och spännande. Länkar till de digitala konstruktionerna finns på Nämnaren på nätet.

Det så kallade gyllene snittet förekommer ofta i vår vardag utan att vi kanske egentligen tänker på det eller märker av det. Men vad är egentligen gyllene snittet? Vi (i västvärlden) har en uppfattning om skönheten i att proportioner mellan former eller sträckor uppfyller ett visst förhållande som vi kallar för det gyllene snittet. Det har stor betydelse inom exempelvis konst och arkitektur. Gyllene snittet är, enkelt uttryckt, ett visst bestämt förhållande mellan sidorna i en rektangelformad yta.

Geogebra kan användas för att dela sträckan AB i två delar där förhållandet mellan dessa två delar är lika med gyllene snittet.

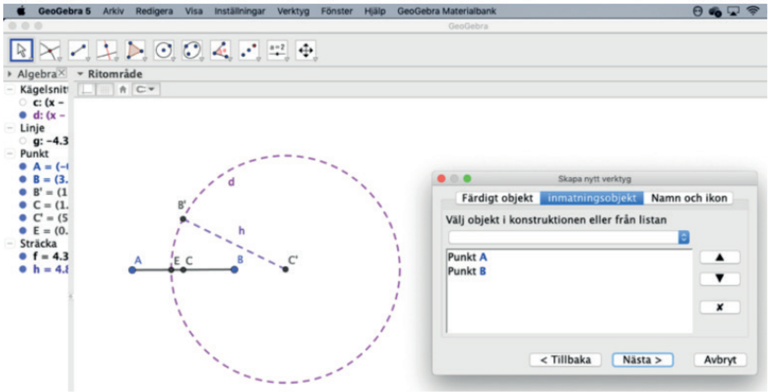
- Först konstruerar vi mittpunkten C av AB.
- Därefter konstruerar vi punkten C' som är spegelpunkten av C i B.
- Vi konstruerar en sträcka CB' = CB där CB' är vinkelrät mot CB.
- Sist konstruerar vi en cirkel med medelpunkt C' och periferipunkt B'.
- Cirkeln skär sträckan AB i punkten E.

Kvoten $\frac{BE}{AE} = 1{,}61803$ kallas för det gyllene talet och betecknas med den grekiska bokstaven *phi*: φ.



Denna konstruktionen i Geogebra kan användas för att skapa ett verktyg som delar en sträcka i två delar där förhållandet mellan dem är lika med det gyllene snittet. Det gör vi på följande sätt:

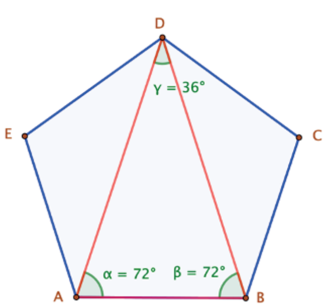
– I menyn **Verktyg** väljer vi **Skapa nytt verktyg**. Då öppnas en ny ruta.
– Under **Färdiga objekt** väljer vi Punkt E, sedan **Nästa**.
– Under inmatningsobjekt väljer vi Punkt A och Punkt B, sedan **Nästa**.
– Vi namnger verktyget och väljer **Slutför**.



En gyllene kvot

När verktyget i Geogebra finns på plats kan det användas för att dela en valfri sträcka i det gyllene snittet. Med hjälp av trigonometri kan vi beräkna värdet av längden av detta gyllene förhållande och vi ser att dess värde är lika med $\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$, vilket med fem decimaler är 1,61803. Det inverterade värdet brukar kallas gyllene kvoten och är $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} = 0{,}61803$. En rektangel är gyllene då dess långsida har längden $a + b$, med proportioner enligt gyllene snittet, och dess kortsida längden b. Gyllene rektanglar kan ses i flaggors och fönsters proportioner, i byggnader som Parthenons tempel i Aten och Le Corbusiers skapelser, målningars uppbyggnad, förpackningar i livsmedelsaffären, serietidningars format med mera.

Gyllene snittets förhållande återkommer även i förhållanden mellan tal, till exempel kvoten för konsekutiva tal i Fibonacci-serien, samt i bland annat solrosens blomma, ananasfruktens skal, romanescohuvuden och skalet hos bläckfiskarten pärlbåt där vi finner så kallade logaritmiska spiraler som kan konstrueras utifrån gyllene rektanglar.



$$\varphi = \frac{AD}{AB} = \frac{6.2457}{3.86005} = 1.61803$$

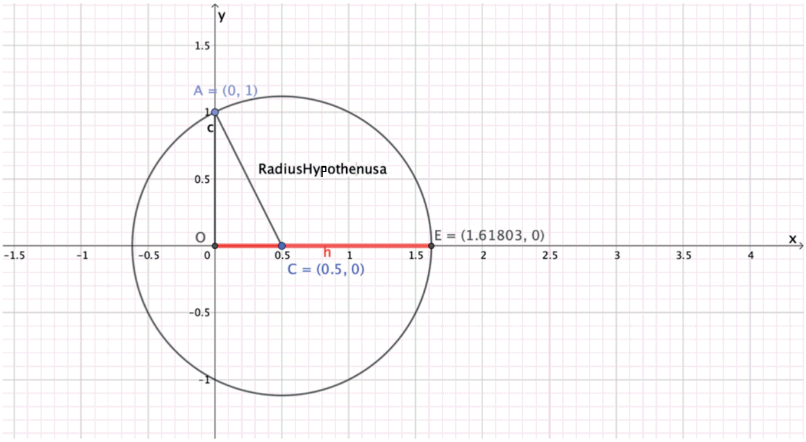
En klassisk fotboll består av 12 svarta, regelbundna femhörningar och 20 vita regelbundna sexhörningar. I en regelbunden femhörning motsvarar förhållandet mellan en diagonal och en sida just gyllene snittet.

Triangeln i figuren kallas för en gyllene triangel. Det är en likbent triangel med två vinklar på 72° och en tredje vinkel 36°.

Det gyllene talet

Med hjälp av en rätvinklig triangel och en cirkel kan vi också konstruera *phi* = det gyllene talet.

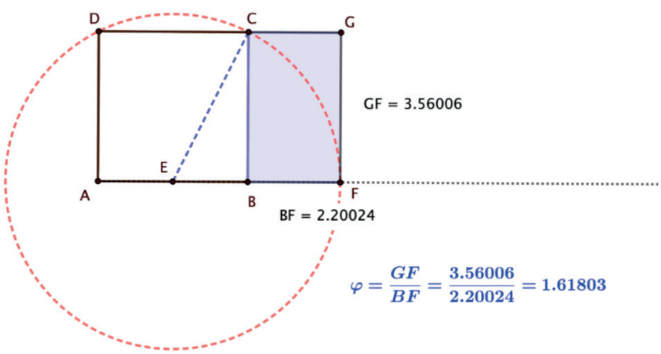
- Vi konstruerar först en rätvinklig triangel ABC med kateterna $\frac{1}{2}$ och 1 längdenhet, med A i punkten (0, 1), den räta vinkeln B i origo och C i punkten (0.5, 0).
- Vi konstruerar en cirkel med mittpunkten C och periferipunkt A.
- Vi låter E vara skärningspunkten E mellan cirkeln och x-axeln.
- Längden av sträckan OE = 1,61803 är det gyllene talet *phi*.



En gyllene rektangel

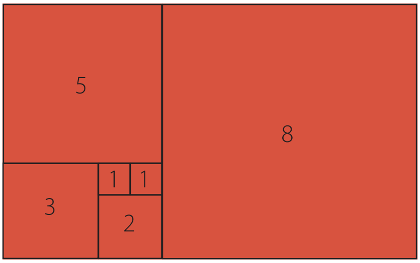
I den gyllene rektangeln är förhållandet mellan två sidor lika med det gyllene snittet. Vi kan konstruera en gyllene rektangel med hjälp av Geogebra.

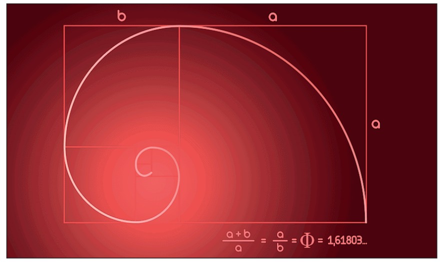
- Vi konstruerar först en kvadrat ABCD och mittpunkten E av AB.
- Vi konstruerar en cirkel med mittpunkten E och periferipunkt C.
- Vi konstruerar punkten F som är skärningspunkten mellan cirkeln och strålen AB.
- Vi konstruerar FG vinkelrätt mot BF, där FG = BC.
- Rektangeln BFGC är en gyllene rektangel.



Gyllene snittet och Fibonacci

Det finns ett spännande samband mellan gyllene snittet och Fibonaccitalen som också utgör grundmönstret i många spiralformationer i naturen.





Fortsätter vi att bygga på figuren med en ny kvadrat vars sidlängd är summan av de två föregående får vi en allt större rektangel. Rektangelns proportioner närmar sig det gyllene snittet med större noggrannhet ju större den blir. Om vi beräknar kvoten mellan successiva Fibonaccital får vi:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$\frac{5}{3} = 1{,}66$$
$$\frac{8}{5} = 1{,}6$$
$$\frac{13}{8} = 1{,}625$$
$$\frac{21}{13} = 1{,}615$$
$$\frac{34}{21} = 1{,}618$$

Det kan vara bra för elever att få möta en kulturhistorisk exposé över matematikens koppling till omvärlden och det här exemplet visar matematiken dold i det gyllene snittet och i Fibonaccital.