Pål-Erik Eidsvig

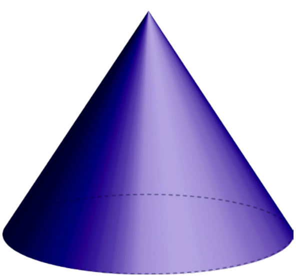
Förståelse för konens volymformel

För att elever inte bara ska memorera matematiska formler utantill behöver de få förståelse för varför formler ser ut som de gör. Här visar författaren hur han genom att utgå från konkret material ger eleverna möjlighet att resonera om och få en djupare förståelse för konens volymformel.

Målet med denna artikel är att ge ett förslag på en arbetsgång som kan öka elevers förståelse för konens volymformel. Jag beskriver en modell som kan ses som ett bidrag till fördjupat lärande i matematik och som kan öka förståelsen inom algebra, geometri och programmering. Jag testade modellen på en 60-minuterslektion i en åttondeklass. Eleverna fick uppleva att ett matematiskt uttryck kan beräknas numeriskt med hjälp av programmering. Detta är något de ofta kommer att möta i verkligheten.

Konstruktion av en specifik konmodell

För att komma fram till formeln för volymen på en kon med en cirkulär bas som visas i figur 1a tittar vi först på en förenkling. Förenklingen innebär att modellen är uppdelad i cirkulära skivor med samma tjocklek men med olika diametrar som i figurerna 1b och 1c.

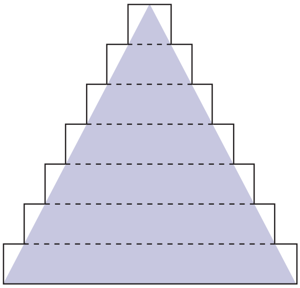


Figur 1a

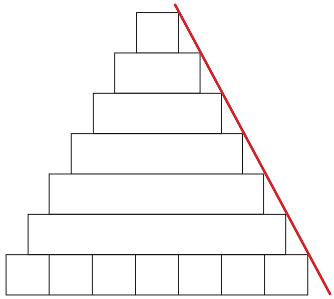
Figur 1b

Figur 1c

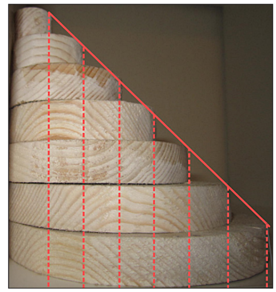
Tillsammans tittar vi även på ett tvärsnitt av modellen där diametern på den nedersta skivan är 14. Jag väljer att dela denna diameter i 7 lika långa längder. Varje del får då längden 2, se figur 2b. För varje ny platta som vi lägger på minskas diametern med 2, se figur 2c. Diametern på den näst nedersta skivan blir sålunda 12, den tredje skivan nerifrån får diametern 10. Detta mönster upprepas hela vägen upp till den översta skivan som då har diametern 2. Den konstanta minskningen av diametern på varje skiva illustreras av den räta linjen som visas i figur 2b och figur 2c.



Figur 2a



Figur 2b



Figur 2c

För att hitta den totala volymen i modellen beräknar vi volymen för varje cirkulär skiva och summerar volymen för var och en. Trävirkets tjocklek är 1,8 och är densamma för alla skivor. Volymen på den översta och näst översta skivan kommer då att vara:

$$V_{\text{överst}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}8 = 5{,}7 \text{ och } V_{\text{näst överst}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 1{,}8 = 22{,}6.$$

En summering av volymen på de sju cirkulära skivorna ger:

$$V_{\text{total}} = 5{,}7 + 22{,}6 + 50{,}9 + 90{,}5 + 141{,}4 + 203{,}6 + 277{,}1 = 791{,}8$$

När vi använder formeln för volymen på en kon med basarea B som ges av

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \text{ med } r = 7, h = 1{,}8 \cdot 7 = 12{,}6 \text{ får vi}$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 7^2 \cdot 12{,}6}{3} = 646{,}5$$

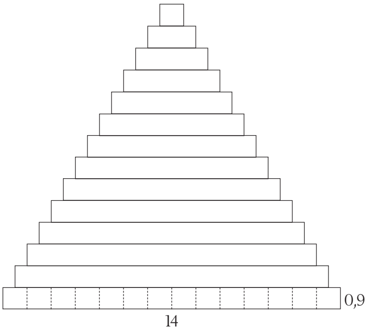
och konstaterar att beräkningarna ger olika svar. Konmodellens volym har gett för stor volym i förhållande till användningen av formeln. För att förbättra tillvägagångssättet delar vi diametern i 14 lika långa längder och vi delar även höjden på motsvarande sätt. Höjden på varje skiva är nu 0,9 och den övre skivans diameter är 1 som i figur 3a. Vi beräknar den totala volymen på de 14 runda skivorna och får

$$V_{\text{total}} = 0{,}7 + 2{,}8 + 6{,}4 + \ldots + 138{,}5 = 717{,}4.$$

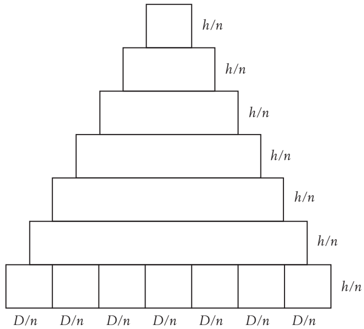
Genom att dela konen i 14 skivor har vi kommit närmare den faktiska volymen på 646,5. Att dela upp konen i fler och tunnare skivor innebär att vi närmar oss den faktiska volymen.

Konstruktion av en generell konmodell

För att konstruera en generell modell för volymen av en cirkulär kon leder jag också här in elevernas tankar till att sätta ihop cirkulära skivor. Jag kallar diametern längst ner på konmodellen för D och väljer att dela diametern i n delar. Längden på diametern på bottenplattan består då av längderna D/n, se figur 3b. Jag väljer också att dela höjden i n-delar så att höjden på varje skiva blir h/n.



Figur 3a



Figur 3b

Figur 3a visar diametern på den nedersta cirkelskivan uppdelad i 14 lika långa längder. Figur 3b visar en allmän modell av en kon där diametern och höjden är uppdelade i n lika delar. För att hitta konens totala volym summerar vi volymen för varje enskild skiva. Arean för den cirkulära skivan är $\pi \cdot r^2$ där $r = D/2$ och skivans höjd är lika med h/n.

Volymen på den översta skivan kan nu uttryckas med D, n och h. Eftersom skivans diameter är D / n blir skivans radie $r = (D / n) / 2 = D / 2n$.

Volymen på den översta skivan kan nu skrivas som:

$$V = \pi r^2 \cdot \mathrm{h} = \pi \left(\frac{D}{2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)$$

Allt eftersom vi rör oss neråt får varje skiva en diameter som är D / n större än skivan ovan. Diametern på den näst översta skivan blir således $D / n + D / n = 2D / n$. Vi finner skivans radie genom att dela diametern med 2 och får $r = 2D / 2n$.

Volymen på den näst översta skivan kan nu skrivas som:

$$V = \pi r^2 \cdot \mathrm{h} = \pi \left(\frac{2D}{2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)$$

För att hitta konens totala volym lägger jag samman volymen på skivorna från toppen till botten.

$$V_{\text{total}} = \pi \left(\frac{1 \cdot D}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right) + \pi \left(\frac{2 \cdot D}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right) + \pi \left(\frac{3 \cdot D}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \pi \left(\frac{n \cdot D}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right)$$

Jag faktoriserar och får:

$$V_{\text{total}} = \pi \left(\frac{1 \cdot D}{2 \cdot n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{n}\right) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Jag ersätter D med $2r$ och förkortar. Detta ger

$$V_{\text{total}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)}{n^3} \qquad (*)$$

Bråkuttrycket i den allmänna formeln i (∗) kan beräknas med simuleringar. Jag låter eleverna använda två olika program, dels det textbaserade programmet Python, dels det blockbaserade programmet Scratch, se nedan. Båda programmen simulerar att bråkuttrycket i (∗) går mot 1/3 när n går mot oändligheten.

Konens volym kan nu skrivas som:

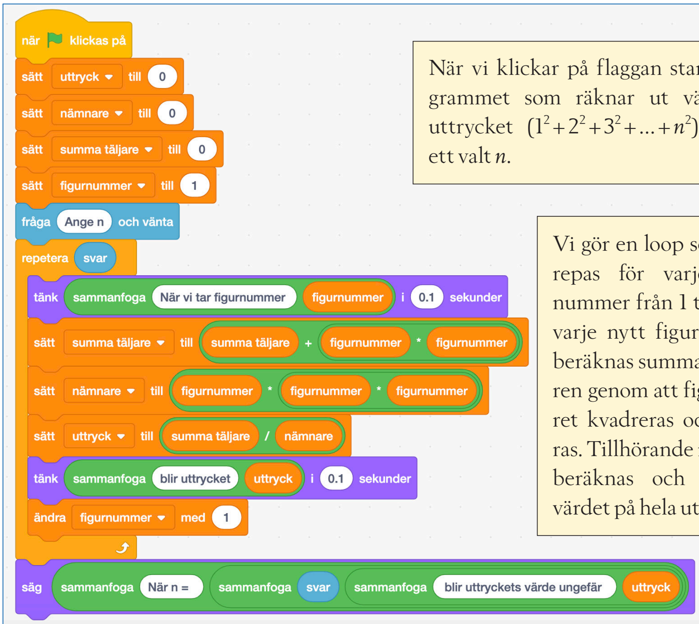
$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Simulering med Python och Scratch

Först förklarar jag variabeln kvadratsum som senare blir summan av kvadraterna av de naturliga talen upp till n. Sedan gör jag en inmatning så att man kan välja n i formeln på nytt varje gång programmet körs. Jag gör en loop som går igenom alla heltal från 1 och upp till det valda talet. När i har blivit större än n avbryts loopen. Jag dividerar detta med n^3 så som det sista uttrycket visar. När olika värden för n matas in ges följande resultat:

```
kvadratsum=0
i=1
n=int(input(' n=  '))
while i <= n:
      kvadratsum=kvadratsum + i*i
      i= i + 1
svar=kvadratsum/n**3
print(svar)
```

n	$\frac{(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)}{n^3}$
1	1,0
5	0,44
100	0,33835
10000000	0,3333333383333335



När vi klickar på flaggan startar programmet som räknar ut värdet på uttrycket $(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)/n^3)$ för ett valt n.

Vi gör en loop som upprepas för varje figurnummer från 1 till n. För varje nytt figurnummer beräknas summan i täljaren genom att figurnumret kvadreras och adderas. Tillhörande nämnare beräknas och därefter värdet på hela uttrycket.

Utvärdering av lektionen

Resultat från en anonym utvärdering av lektionen visar att knappt 60 % av eleverna förstod konmodellens struktur i hög eller mycket hög grad. Cirka 75 % instämde i uttalandet ”programmering var viktigt för att nå formeln”. Cirka 70 % av eleverna angav att de hade fått en bättre förståelse för varför man delar med 3 i formeln. Dessutom tyckte en stor del av klassen att de har fått ett fördjupat lärande om ämnet volym. Knappt 60 % förstod programmet i Python i hög eller mycket hög grad, cirka 25 % förstod det i låg grad och resten i mycket låg grad.

På frågan om vad som var bra nämnde flera att de lärt sig något nytt, att lektionen var intressant, eller att de förstod varför formeln ser ut som den gör. ”Jag förstod pi bättre och hur man beräknar volymen på en cirkel och kon.”

Om jag tittar på elevernas förslag på vad jag kunde ha gjort annorlunda så framstår tidsaspekten som viktig. Cirka 25 % svarade att jag kunde ha gått lite långsammare fram. En elev skrev: ”Jag tror inte att han kunde förklara något annorlunda. Men det hade varit trevligt om vi hade haft lite mer tid, så vi fick arbeta mer och diskutera det tillsammans i grupp”. En annan elev efterlyste fler förtydliganden: ”Mer ingående förklaringar av hur och varför du gjorde saker och ting."

Avslutande kommentarer

Lektionen som beskrivs i den här artikeln genomfördes under en begränsad tidsram. Till nästa gång kommer jag att göra några ändringar i arbetsgången och genomföra den under betydligt längre tid. Eleverna ska gruppvis få bygga koner med samma dimensioner men med två olika skivstorlekar.

Så småningom kommer eleverna att kunna utforska uttrycket i ekvation (*) utan att använda Python och beräkna uttrycket för n-värden upp till 10. Detta arbete kan motivera dem att hitta en mer effektiv metod för att göra beräkningarna när n ökar. Under arbetet ska de få hjälpfrågor från mig.

I klassen var det relativt få som hade erfarenhet av programmering, men redan efter en halvtimme med textbaserad programmering förstod en del hur programmet var strukturerat. Ska jag lyfta fram några erfarenheter så är det att många elever tyckte att det här var spännande och att de lärde sig något nytt. Naturligtvis spelar tiden en viktig roll för hur mycket eleverna kan behärska efter bara en timme. Hade eleverna haft mer tid för att utforska programmet och strukturen, hade säkert ännu fler känt att de behärskade det.

Om vi kan växla mellan textbaserad och blockbaserad programmering kommer förmodligen fler elever att kunna ta itu med liknande problem på ett systematiskt sätt. Jag har därför skapat ett program i Scratch som simulerar detsamma som programmet i Python och kontinuerligt visar vad bråken går mot när leden summeras längs vägen till det givna n-värdet. I detta sammanhang kan programmet ge oss lärare möjligheter att differentiera undervisningen ännu mer, vilket leder till att lektionerna blir mer utforskande.

LÄNKAR

scratch.mit.edu/projects/473754431
scratch.mit.edu/projects/479497867

En kommentar till länkarna finns på Nämnaren på nätet.