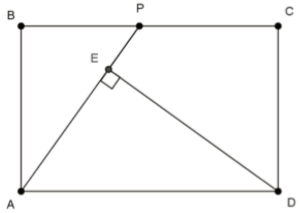
David Taub

Skrivfelet som bara ger och ger

Ibland kan ett enkelt skrivfel ge upphov till fördjupande och intressant matematik. Här får vi följa med på en undersökning av ett felkonstruerat problem med algebra och några dynamiska program, en undersökning som leder långt bortom vad som var tanken med det ursprungliga problemet.

Jag fick nyligen en fråga om hjälp från en före detta kollega. Han hade hittat ett problem som han ville ge till eleverna, men kunde inte lösa det själv:



> Punkt P ligger på sidan BC i rektangeln ABCD. Punkt E är ritad på AP så att DE är vinkelrät mot AP. Om AP = DE och arean av rektangeln är 900 cm^2, bestäm då AP och DA.

Vid första ögonkastet tyckte jag att det kunde lösas enkelt med t ex likformighet, men jag insåg ganska snabbt att någonting inte stämde. Det går helt enkelt inte att bestämma AD entydigt – problemet innehöll ett skrivfel och frågan skulle ha varit ”bestäm då AP och DE”. Nu började intressanta frågor och följdfrågor dyka upp, och snart därefter idéer till lektionsplanering som passar allt från högstadiet till gymnasiet och för elever på olika kunskapsnivåer. Idéer fortsätter att komma – problemet verkar vara en näst intill bottenlös källa att ösa ur.

> Om arean av rektangeln är 900 cm^2, bestäm då AP och DE.

Ifall man skriver ut några skalenliga bilder av rektangeln kan eleverna klippa längs sträckorna och ”lägga pussel”. Det går att bygga en kvadrat med sidorna AP och DE som kan leda till arean $AP \cdot DE$. En något svårare uppgift som kan lösas med likformighet är:

> Visa att om punkt E ligger i rektangeln är arean $AP \cdot DE$, även om $AP \neq DE$.

För elever som behöver stöd kan man formulera om frågan och be dem att experimentera med GeoGebra:

> Finns det ett samband mellan AP och DE och arean av rektangeln?

Nu börjar det bli mer intressant:

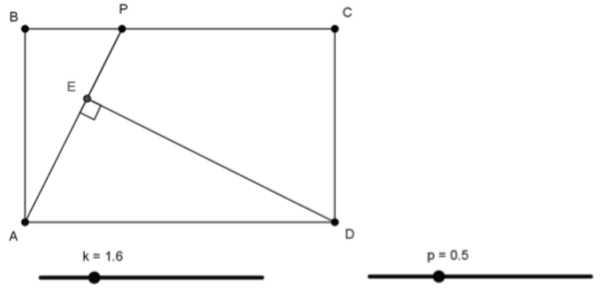
> Om man väljer punkt P godtyckligt på BC och punkt E ligger på linjen AP så att DE är vinkelrät mot AP, när ligger punkt E inne i rektangeln och när ligger den utanför?

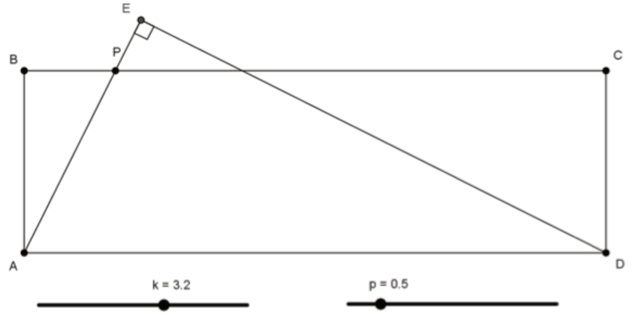
Eleverna kan med fördel experimentera med exempelvis GeoGebra. De kan skapa olika rektanglar och flytta punkt P och notera var punkt E hamnar. Att konstruera modellen i GeoGebra kräver kreativitet av eleverna och kan vara ett lärorikt och roligt moment i sig, men först kan det vara en fördel att ta upp några mer allmänna frågor med klassen:

Vad är det egentligen som skiljer en rektangel från en annan?

Kan man beskriva grupper av olika rektanglar utan att ange specifika mått på sidorna då det finns oändligt många kombinationer av mått?

Förhoppningsvis kommer eleverna fram till, kanske med hjälp från läraren, att det är just förhållandet mellan sidorna som spelar roll, allt annat är bara en fråga om skala, och alla likformiga rektanglar kan beskrivas med ett enda tal. Jag har t ex valt att använda bokstaven k för förhållandet mellan rektangelns sidor så att $k = 2$ betyder att AD är dubbelt så lång som AB. Då är det lättare att skapa en modell i GeoGebra att experimentera med.



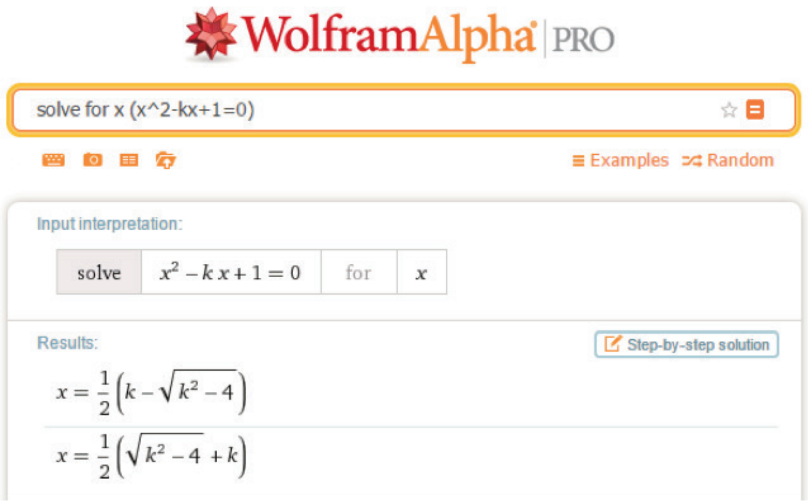


När eleverna har utvecklat en teori kan de börja pröva den. Några elever kan försöka bevisa teorin eller till och med gå direkt på en teoretisk lösning medan de andra experimenterar.

Lösningsstrategier

Det finns många olika sätt att lösa problemet. Läraren kan antingen guida och uppmuntra vissa strategier, eller låta eleverna själva hitta olika sätt och sedan jämföra dem. Här följer några förslag.

- Det går att använda likformighet och algebra på lite högre nivå. Detta leder till en andragradsekvation som kan lösas med vanliga metoder eller som kan skrivas in i WolframAlpha om eleverna inte har lärt sig hur man gör. WolframAlpha kan till och med lösa "allmänna" andragradsekvationer. Till exempel:



- Problemet kan vara ett bra tillfälle att visa hur man kan kombinera olika delar av matematik. Ett något enklare och kanske inte uppenbart sätt är att använda grafer. Sätt ut rektangelns punkter så här (jag visar ett allmänt sätt med k, men om detta är för svårt kan eleverna välja olika specifika tal att testa):

  $$A(0,0)\ B(0,1)\ C(k,1)\ D(k,0)$$

  För att underlätta de algebraiska beräkningarna ansätter vi en variabel $BP = n$

  Ekvationen för linjen AP blir då $y = nx$ (enkel proportionalitet)

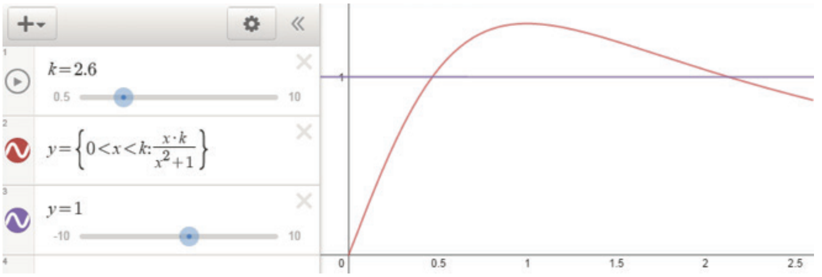
  Nästa steg är att hitta ekvationen för DE. Vi vet lutningen direkt: $-1/n$ då den är vinkelrät mot AP. Vi vet punkt D och använder standardmetoder:

  $$nx = -\frac{1}{n}x + \frac{k}{n} \rightarrow \left(n + \frac{1}{n}\right)x = \frac{k}{n} \rightarrow (n^2+1)x = k \rightarrow x = \frac{k}{n^2+1}$$

  $$E = \left(\frac{k}{n^2+1}, \frac{nk}{n^2+1}\right)$$

  Punkten E är då skärningspunkt för AP och DE. Det är egentligen bara y-värdet som är intressant. När är det mer eller mindre än $y = 1$ för ett givet k?

- Eleverna kan undersöka situationen med Desmos för olika k-värden (man kan använda en s k slider i Desmos eller bara byta ut värdena).



Notera att x-axeln visar hur långt punkt P är från punkt B och y-axeln visar hur högt punkt E ligger ovanför AD. Mönstret blir lätt att genomskåda nu. P och E sammanfaller på två ställen (om $k > 2$), E ligger också på rektangeln vid två ställen. E ligger utanför rektangeln mellan de två ställena, annars innanför. Än en gång är det skärningspunkter vi vill hitta:

$$1 = \frac{kx}{x^2 + 1} \rightarrow x^2 + 1 = kx \rightarrow x^2 - kx + 1 = 0$$

En andragradsekvation som kan lösas för hand eller med WolframAlpha. Det är intressant att notera att för $k < 2$ ligger E alltid inuti rektangeln. En annan intressant fråga är följande:

Går det alltid att hitta punkt P så att AP = DE om E ligger inuti rektangeln?

Man kan t ex använda likformighet och Pythagoras för att få BP $= \sqrt{k-1}$. Vi ser att k måste vara större än 1, men finns det en övre gräns? Vi kan använda samma Desmos-modell som tidigare och bara lägga till denna punkt. Man kan efter lite prövning se att det endast går om $1 < k < 2$. Elever som behöver utmaningar kan få uppgiften att bevisa det.

… och till sist

Det är lätt att se att om punkt P ligger längst till vänster då sammanfaller E med A. Men vad händer längst till höger? Finns det ett gränsvärde för E? Vad händer när k blir riktigt stor? Man kan utforska problemet med en graf, använda derivata för att hitta extrempunkter eller använda gränsvärden. En rolig utmaning kan vara att utforska problem mer noggrant i GeoGebra. Se figuren nedan. Här ser man alla ställen där punkt E kan ligga. Är kurvan en del av en cirkel? Eller ser det bara ut så? Problemet innehåller ännu mer intressant matematik, som det kan vara roligt att hitta själv eller med hjälp av eleverna.
Allt det här från ett enda skrivfel!