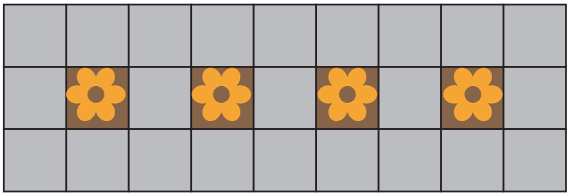
Bo Sjöström & Jacob Sjöström

Det ökar med samma hela tiden

Författarna, som har erfarenheter som matematiklärare i grundskolan och inom lärarutbildningen, ger här en kommentar till artikeln *Att undervisa matematik för kreativa resonemang* i Nämnaren 2019:4 och presenterar en aktivitet som de har genomfört med många elever på olika kunskapsnivåer.

I den intressanta artikeln *Att undervisa matematik för kreativa resonemang* finns ett moment som handlar om en rabatt med blommor och plattor. I en bild visas 27 rutor där 23 motsvarar plattor och fyra har ersatts av blommor.



Dessa frågor ställs i artikeln:

a. Hur många plattor behövs om det är 5 blommor?

b. Hur många plattor skulle det vara om det istället är 10 blommor?

c. Hur många plattor skulle det vara om det är 100 blommor?

d. Kan du komma på ett sätt att räkna ut antal plattor med vilket antal blommor som helst?

När eleverna löser uppgifterna utgår de från att blommorna är ”gratis” och att antalet tilläggsplattor som behövs ökar med fem hela tiden. En elev säger:

> *Man tar så många blommor man har och gångrar med fem, sen lägger man till tre, därför att annars finns inte den här raden (pekar på de tre första plattorna).*

Det viktigaste här är att eleverna utnyttjar att differensen är konstant (fem). När elever så småningom kan använda algebraiska uttryck, kan några förmodligen komma fram till en generell formel, exempelvis:

> *Om antalet blommor är n stycken, så kan antalet plattor som behövs beskrivas med formeln* $3 + 5n$ *(eller* $5n + 3$*).*

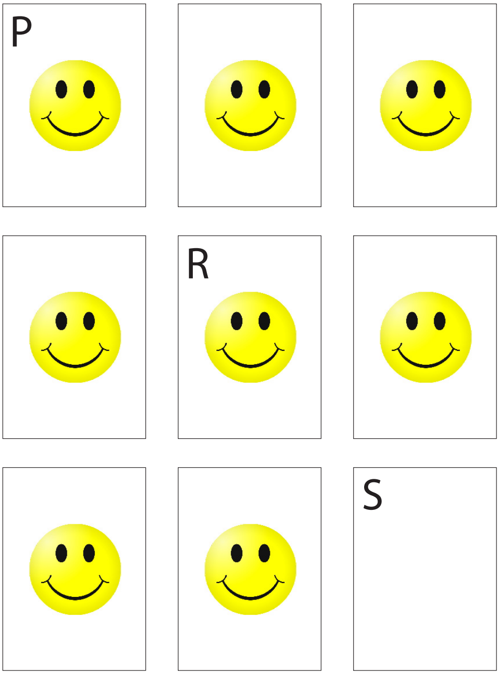
Minsta antal förflyttningar

Vi presenterar här en aktivitet som vi har genomfört många gånger. Även den bygger på att eleverna ska upptäcka att differensen är konstant. Men vi kan också komma närmare en lösning om eleverna upptäcker och använder strategin *förenkla problemet*. Vi presenterar inte strategin för våra elever utan vi vill att de själva ska komma underfund med den, och den hjälp den kan ge, när de arbetar med detta och liknande problem.

Vi ger här instruktioner till hur du kan leda arbetet och kommenterar utifrån hur våra elever brukar tänka.

Förutsättningarna presenteras

Markera exempelvis med A4-papper ett rutnät 3 × 3 på golvet. Låt åtta elever komma fram och inta var sin plats på alla rutor utom en av hörnrutorna.



P ska med *minsta möjliga antal förflyttningar* hamna i den tomma rutan (här längst ner till höger) och följande regler gäller:

- P får inte hoppa över någon av kamraterna
- alla måste röra sig vågrätt eller lodrätt
- varje förflyttning räknas.

Locka gärna eleverna till att låta R vara "rundningsmärke", det vill säga R står still hela tiden, medan övriga bara förflyttar sig med- eller moturs. Detta innebär att antalet förflyttningar blir så många som 25, men det är ett enkelt sätt att genomföra P:s förflyttning på.

Hitta minsta möjliga antal förflyttningar

Låt de åtta eleverna prova ett par gånger till. De kan säkert finna andra sätt för att få P att gå den närmsta vägen. När är eleverna säkra på att de hittat minsta möjliga antal förflyttningar (som är 13)? Hur vet de det?

Undersökning i par

Låt även de elever som tittar på komma med förslag innan det är dags för alla elever att göra en undersökning. Låt dem sitta ner, gärna i par eller liten grupp och rita 3×3 rutor. Använd små papperslappar eller markörer av något slag som de kan förflytta.

Låt gärna eleverna prova ytterligare några gånger med 3×3 rutor. När flera grupper fått samma minsta antal (13) antecknar du rekordet på tavlan. Låt eleverna bli ännu säkrare på hur de kan finna det minsta antalet förflyttningar genom att de även provar med 4×4 och 5×5 rutor. Anteckna även dessa rekord på tavlan som då kan se ut så här:

Låt stå!

Antal rutor	Antal förflyttningar (minimum)
3×3	13
4×4	21
5×5	29

Försök med att hitta en formel

Ifrågasätt hur eleverna kan vara säkra på att de har hittat minsta antal förflyttningar. Några ser kanske mönstret, ökningen med åtta, men tysta gärna ner sådana röster ett tag.

Kan eleverna hitta ett sätt att förutsäga hur många förflyttningar det behövs för 10×10 rutor, för 100×100, för $n \times n$ rutor? Här är det vanligt att elever försöker bilda en formel med hjälp av antal rutor och diverse räkneoperationer. Ibland stämmer det för ett eller två fall, men det brukar vara svårt att få fram en formel om man inte tar tillvara att *ökningen är konstant* = 8.

Fråga eleverna om de kan fylla på tabellen och använda den. Ingen (eller få) brukar ha brytt sig om 2×2 rutor, men det är viktigt för att det ska gå att upptäcka så mycket som möjligt av mönstret i tabellen. Det görs bäst om man ser talföljdens första tal.

Låt stå!

Antal rutor	Antal förflyttningar (minimum)	
1×1	–	
2×2	5	
	↓	8 (differens)
3×3	13	
	↓	8 (differens)
4×4	21	
	↓	8 (differens)
5×5	29	

Att formulera en formel

I följande tabell ger vi exempel på hur det går att formulera en formel av gjorda observationer. Det är ingen nödvändighet för alla, vilket vi återkommer till.

Låt stå!

$n \times n$	Antal (A)	Kan skrivas
1×1	(-3)	$5 - 1 \cdot 8$
2×2	5	$5 + 0 \cdot 8$
3×3	13	$5 + 1 \cdot 8$
4×4	21	$5 + 2 \cdot 8$
5×5	29	$5 + 3 \cdot 8$
...		
100×100		$5 + 98 \cdot 8$
...		
$n \times n$		$5 + (n - 2) \cdot 8$

Andra raden med 2×2 är inte den första elever fyller i, men det är första möjliga talet i talföljden och den är viktig för att det ska gå att se mönstret. Den är också ett exempel på hur problemlösningsstrategin *förenkla problemet* kan hjälpa elever att upptäcka och bekräfta ett mönster. Första raden med 1×1 ser lite konstig ut och elever brukar fundera på hur den kan tolkas. Några har till exempel sagt att ”förflyttningen var färdig tre steg tidigare”. Eleverna kan i tabellens tredje kolumn upptäcka den lodräta talföljden -1, 0, +1, +2, +3 ... och då se hur strategierna *upptäcka mönster* och *göra tabell* kan samverka. Dessa båda strategier används ofta tillsammans i de problem som vi låter eleverna lösa.

Vår aktivitet kan, via tabellen, leda fram till formeln $A = 5 + (n - 2) \cdot 8$. För rad 3 ($n = 3$) gäller då: $A = 5 + (3 - 2) \cdot 8 = 5 + 1 \cdot 8 = 13$. Antal steg (A) är alltså 13. För rad 2 ($n = 2$) gäller då: $A = 5 + (2 - 2) \cdot 8 = 5 - 0 \cdot 8 = 5$. Antal steg är alltså 5. Denna formel ger också möjlighet att se samband (via förenklingar) mellan olika algebraiska uttryck:

$$A = 5 + (n - 2) \cdot 8 = 5 + 8n - 16 = 8n - 11$$

Hur kan elever kontrollera att även formeln $A = 8n - 11$ stämmer? De kan till exempel sätta in värden från rad 3 och få $13 = 8 \cdot 3 - 11$. Det stämmer alltså för rad tre. Elever kan gärna testa och se att det stämmer på fler rader i tabellen.

Beskriva formeln med ord

Det är inte nödvändigt att eleverna kommer fram till en skriven formel. Det kan räcka att de inser att de inte behöver lägga allt större kvadrater, ökningen är ändå hela tiden 8. Därmed kan de i ord beskriva formeln:

> *För 2 × 2 rutor behövs 5 förflyttningar, för 3 × 3 behövs 13 förflyttningar, och så fortsätter det att öka med 8 hela tiden.*

Elever som formulerar sambandet med ord kan sen testa och se hur det stämmer.

Slutsatser

Vi har genomfört aktiviteten med lärare, studenter och elever från 11 år och uppåt. Sämst går det för dem som är formelfixerade i meningen att de direkt vill hitta en algebraiskt uttryckt formel. De formelfixerade försöker bilda formler utan att bry sig om den tydliga konstanta differensen 8. Bäst går det för dem som upptäcker den och utnyttjar differensen i sitt formelsökande. Det finns också de som "tänker ut" formeln genom att räkna stegen som P tar och de övrigas steg.

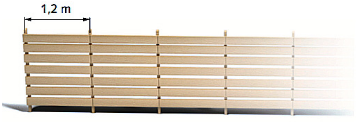
Vid ett föräldramöte, med föräldrar som var en aning kritiska till lärarens fokusering på mönster, hade elevparen skapat en formel långt innan deras föräldrar hade kommit på att utnyttja differenstänkandet.

Många, både unga elever och vuxna, letar i första hand efter en formel som utgår från matematiska uttryck, regler eller redan kända formler. De känner till formler som "omkretsen är lika med pi gånger diametern", men de missar då att utnyttja mönster och annat som de kan få fram ur observerade värden i materialet. Detta beror i många fall på att de blivit vana vid att matematiken kan tillhandahålla färdiga formler för de flesta situationer.

Hur många stolpar?

Följande problem är ett annat exempel som tydligt visar hur eleverna kan utnyttja strategin att förenkla problemet.

> Ett staket har avståndet 1,2 meter mellan stolparna. Från första till sista stolpen är det 30 meter. Hur många stolpar är det på denna sträcka?



Eleverna behöver först komma underfund med sambandet mellan antal avstånd och antal stolpar. 1 avstånd ger 2 stolpar, 2 avstånd ger 3 stolpar, 3 avstånd ger 4 stolpar och så vidare. Avståndet 30 m dividerat med 1,2 m ger 25 avstånd. Enligt strategin med att förenkla problemet blir det uppenbart att de 25 avstånden kräver 26 stolpar.

Problemlösningsstrategier

Vi har här sett exempel på hur elever lättare löser problem om de kan *upptäcka mönster*, i detta fall att differensen är konstant. Vi har också sett hur det kan underlätta om de använder strategin *förenkla problemet*.

Vi har under många år följt elever i årskurs 4–6 och hinner då, under tre år, introducera tio olika problemlösningsstrategier. En av de första är att *upptäcka mönster* (tillsammans med att *göra tabell*). Långt senare kommer att *förenkla problemet*. Vi ger genom väl valda problem eleverna möjlighet att själva och tillsammans upptäcka aktuell strategi. Detta för att stärka elevens tilltro till sitt eget kunnande och lärande. Strategin och dess användning kan därefter diskuteras i grupp och helklass.

LITTERATUR

D'arcy, D. & Olsson, J. (2019). *Att undervisa matematik för kreativa resonemang*. Nämnaren 2019:4.

Mårtensson, G., Sjöström, B. & Svensson, P. (2012–2014). *Formula 7–9*. Gleerups Utbildning AB.

Sjöström, B. & Sjöström, J. (2016–2018). *Prima Formula 4–6* . Gleerups Utbildning AB.