Thomas Dahl

Om den matematiska förmågan

Matematisk förmåga framträder på olika sätt i skolelevers arbeten. Tidigt i författarens licentiatarbete föreföll matematisk förmåga handla om att i någon bemärkelse kunna lösa problem där metoden är okänd för problemlösaren och där ingen tidigare använd procedur direkt leder till svaret. Förmåga undersöks här i artikeln, med en avslutande utblick mot särbegåvade elever.

Vad kännetecknar ett bra problem? Alexander Borovik och Tony Gardiner identifierar fyra önskvärda egenskaper hos ett ”bra” problem: Det ska vara *tillgängligt* och rotat i en kontext som eleven känner sig hemma i. Problemet ska vara *utvecklande* i meningen att eleven uppmuntras att tänka och resonera i nya banor. Ett bra problem ska också vara *avslöjande* och öppna nya vyer samt kasta nytt ljus över kända matematiska företeelser. Slutligen är det en kvalitet om problemet är *utbyggbart*, till exempel genom en serie generaliseringar.

Termen förmåga kan, som de flesta termer, tolkas på olika sätt beroende på i vilket syfte och i vilket sammanhang den används. I artikeln *Mathematically gifted and talented learners: theory and practice* gör Koshy, Ernest och Casey en distinktion mellan två sätt att se på begreppet matematisk förmåga. Vi har å ena sidan en mätbar förmåga att lösa skolproblem där vissa grepp och metoder förväntas av eleven och som efter någon mall kan bedömas av läraren. Å andra sidan kan begreppet matematisk förmåga tolkas i form av en psykologiskt grundad entitet som en potentiell, i tiden framåtriktad färdighet som inte kan observeras annat än indirekt och som därför förefaller undflyende. Varje undersökning av dess innehåll måste därför vara osäker och ses som den gissning den är.

Det första synsättet innebär att förmåga jämställs med färdighet och exempel på detta är de förmågor som framställs i skolans kursplaner i matematik och vars främsta syfte tycks vara att tjäna som verktyg i skolans mål- och resultatstyrning. Förebilden till dessa är de åtta matematiska kompetenser som presenterades i den danska, mycket omfångsrika *KOM-rapporten* samt det amerikanska *Principles and Standards*. I det följande koncentrerar jag mig på begreppet matematisk förmåga av den andra typen, alltså den svårfångade psykologiska egenskap som uttrycker en potential för matematisk verksamhet.

Frågan om den matematiska förmågans natur intresserade åtskilliga psykologer, matematiker och matematikdidaktiker under förra seklets senare del. Inspirerade av psykometrin, intelligensbegreppet och modern naturvetenskap gjordes många försök att avgränsa begreppet och att undersöka dess inre struktur. Den svenske pedagogen Ingvar Werdelin genomförde i sin doktorsavhandling 1958 en empirisk studie där han testade totalt 1000 kortare uppgifter på elever vid ett gossläroverk i Malmö. Trots höga ambitioner, ett omfattande datamaterial och avancerad faktoranalys, blev hans resultat något av ett västgötaklimax. En förklaring till misslyckandet är möjligtvis att han inte kunde låta bli att inkludera Charles Spearmans generella intelligensfaktor (g-faktorn) bland sina kategorier. Werdelin gav g-faktorn en matematisk tolkning och det visade sig inte helt oväntat att denna faktor helt kom att dominera och följaktligen ramponera hela hans analys. En annan förklaring till misslyckandet är möjligtvis att hans definition av matematisk förmåga varit alltför vid och omfattade annat än det som skulle observeras.

Större framgång hade den sovjetiske psykologen V. A. Krutetskii, vars omfattande verk *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* fortfarande ses som det viktigaste bidraget till förståelsen av matematisk förmåga och som det flitigt refereras till i forskningsrapporter inom pedagogik och matematikdidaktik. Krutetskii kommenterar också Werdelins avhandling, vilken han menar bara mäter färdigheter i matematik och inte säger mer om matematisk förmåga än ett vanligt matematikprov.

I Krutetskiis teori ses den matematiska förmågan som ett komplex av förmågekomponenter som samverkar i en mental struktur. När de kommer till uttryck i en matematisk aktivitet speglar de individens potential för framgång i matematik. Genom intervjuer med ett stort antal matematiker och psykologer samt problemlösningsstudier med över 1000 uppgifter, och med 192 elever i olika åldrar och med olika matematisk fallenhet, lyckades han befästa sin teori.

En individs matematiska förmåga kommer enligt Krutetskii till uttryck då hon arbetar aktivt med matematik – och bara då. En sådan matematisk aktivitet är problemlösning individuellt eller i grupp. De mentala processerna kopplade till problemlösning har studerats av många. Den mest kända studien gjordes av Györgi Pólya på 1950-talet. Pólya identifierar fyra steg i problemlösningsprocessen:

1 förstå problemet

2 upprätta en plan för lösningen

3 jobba igenom problemet enligt planen

4 se tillbaks och reflektera över lösningen.

Pólya menade inte att de fyra stegen måste tas i den nämnda ordningen och att i en aktuell problemlösningsprocess är det fullt möjligt att återvända till ett tidigare steg flera gånger. Krutetskii kände sannolikt till Pólyas idéer, men refererade aldrig till honom i sitt arbete. Icke desto mindre uppvisar hans system av matematiska förmågor stora likheter med Pólyas fyrstegsmodell. Grundstrukturen består av tre sorters matematiska förmågor.

1 Att extrahera, arrangera och formalisera matematisk information ur ett givet problem. (Jämför med steg 1 och 2 i Pólyas modell.)

2 Att processa denna information. (Motsvarar Pólyas steg 3.)

3 Att minnas och vid behov plocka fram strukturella delar av den matematiska informationen. Det kan till exempel handla om element av lösningsstrategier eller ett visst sätt att utnyttja logiska regler på. (Detta är analogt med ”att se tillbaka” i Pólyas modell.)

Den andra punkten i denna lista, ”Att processa denna information”, menar Krutetskii består av fem oskiljaktiga komponenter:

2a förmågan till generalisering av matematiska objekt, relationer och operationer

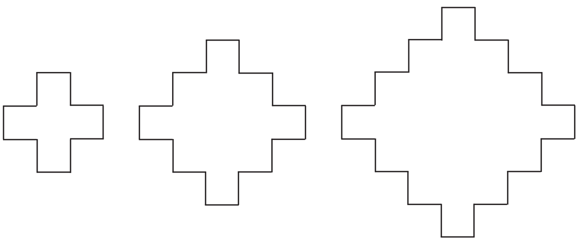
2b förmågan att korta ner matematiska resonemang och operationer (kondensation)

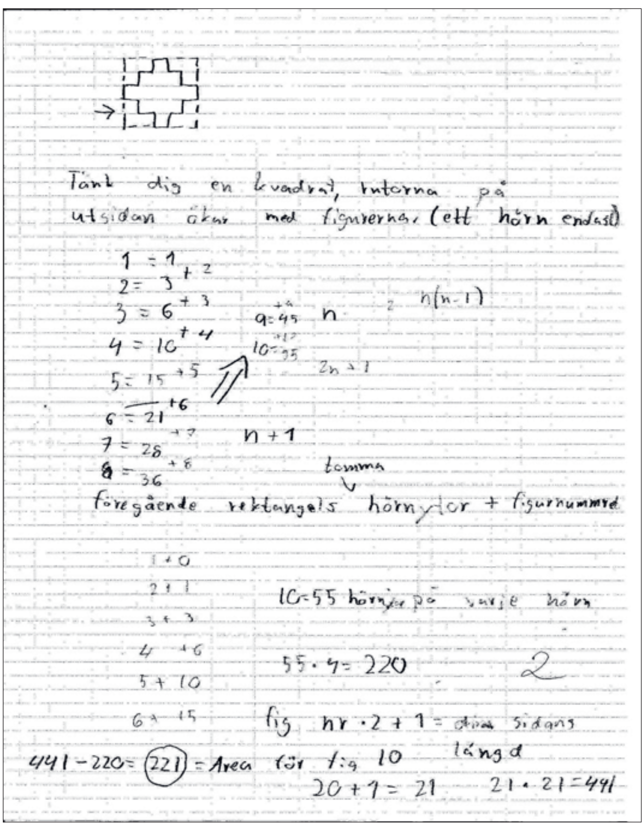
2c flexibilitet i mentala processer

2d strävan efter klarhet, enkelhet och elegans i lösningarna

2e förmågan att fritt byta riktning i en matematisk process, att vända på tankegången och att se en problemställning ur en annan vinkel.

Kan vi spåra Krutetskiis förmågor i elevers arbete med problemlösning? En förutsättning är i så fall att vi har ett ”bra” problem i ungefär samma mening som beskrevs i början av denna artikel. 2008 testade jag bland annat följande problem på 92 elever både i åk 8 och gymnasiets N-program år 1 och 2. Eleverna arbetade under 50 minuter individuellt och i några fall i grupp. Problemet är hämtat från boken *Rika matematiska problem* och handlar om expanderande geometriska mönster där uppgiften är att finna generella uttryck för omkrets och area av figur nummer *n*. Omkretsen av den första figuren var given till 12 längdenheter. Till en början ställde jag frågor om omkrets och area av figurerna 3, 4 och 10, där jag i elevernas respons väntade mig finna evidens för till exempel förmågan till generalisering av matematiska resonemang. Det skulle visa sig att även elever som inte fullt ut behärskade det matematiska formelspråket kunde visa upp denna förmåga till generalisering. Försök gärna själv att lösa problemet innan du fortsätter läsa. Här intill redovisar en elev i åk 8 som enligt hans lärare presterade något under genomsnittet i matematik, sitt försök att lösa problemet. Lösningen är minst av allt klar och elegant, men inte desto mindre uppvisar han förmågor vi skulle kunna kalla kreativa.

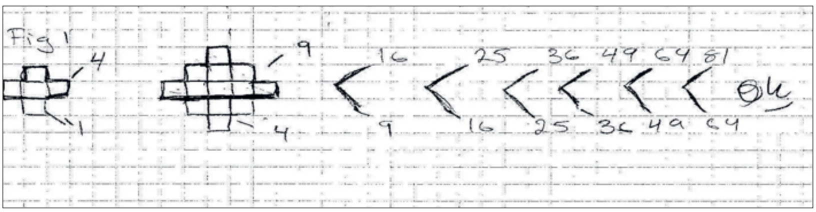




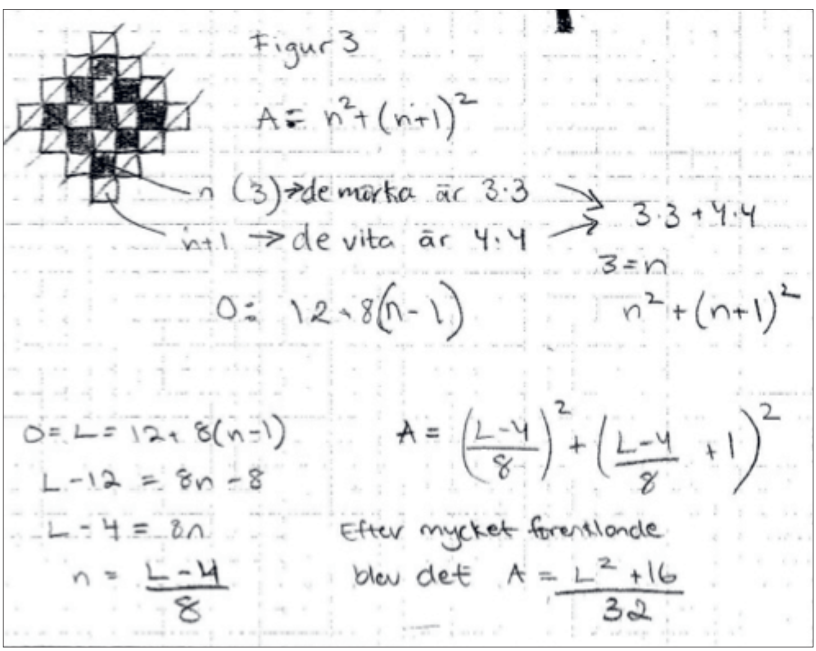
Överst i hans lösning ser vi en av figurerna i serien, nämligen den andra i ordningen. Han skriver in figuren i en kvadrat och väljer att till en början fokusera den area som begränsas av ett av kvadratens hörn och figurens kantlinje. Här visar han prov på förmågan att vända på tankekedjan och försöker på detta sätt komma åt figurens area indirekt. Därför konstruerar han en tabell, som visar hur arean av en sådan hörnyta ökar med stigande ordningsnummer.

Om vi betecknar en hörnytas area för figur nummer n med H_n, så ges arean av nästföljande figurs motsvarande hörnyta av den rekursiva formeln: $H_{n+1} = H_n + n$. På så vis genererar han tabellen, där de matematiskt erfarna genast känner igen triangeltalen, eller den aritmetiska summan $1 + 2 + 3 \ldots$ Här ser vi exempel på förmågan till generalisering, men denna är inte uttryckt i ett formellt matematiskt språk. Då han ska beräkna arean av figur nummer 10 (alltså $n = 10$ i det följande) startar han med att ta fram arean av en hörnyta i denna figur (H_{10}) genom det rekursiva förfarande han ”uppfunnit”. Denna visar sig vara 55 areaenheter. Den totala arean mellan den omskrivna kvadraten och figuren blir då: $4 \cdot 55 = 220$ ae. Eftersom den omskrivna kvadratens area är $(2 \cdot 10 + 1)^2 = 441$ ae erhåller han figurens area som skillnaden mellan kvadratens area och totala hörnytans area. Han får: $441 - 220 = 221$ areaenheter. Man kan fundera över hur en bedömning av elevens lösning enligt kursplanens kunskapsmål skulle se ut. Vilka förmågor uppvisar han?

Följande exempel illustrerar en förmåga att uttrycka en lösning koncist och avskalat:



På nästa rad konstateras att $A_n = n^2 + (n+1)^2$ och motiveringen finns implicit i figursekvensen ovan. Av figuren kan vi identifiera tre förmågor. Eleven visar upp en strävan efter enkelhet och förkortning liksom förmåga till generalisering och till flexibilitet i tanken. En matematiklärare kan däremot sakna en bra motivering till att kvadrattalen uppträder som de gör. I följande eleganta lösning framträder resonemanget klarare:



Den grupp av fyra elever på IB-programmet årskurs 2 som levererade denna lösning hade viss vana vid denna typ av problemlösning och blev klara på mindre än tjugo minuter. De fick därför två extra uppgifter:

- Uttryck arean A som funktion av omkretsen L.
- Är det möjligt att någon figur i serien har en area som är summan av två andra figurers area?

Den första av dessa var avsedd att adressera en strävan efter elegans, enkelhet och klarhet. Den andra uppgiften visade sig vara svårare och först efter mycket huvudbry lyckades gruppen formulera ett hållbart argument för att det var omöjligt. Först erinrade en i gruppen sig att en summa av två udda tal alltid är jämn. Resonemanget som sedan följde blev raskt och nästan rutinmässigt. Eftersom alla figurers area är av udda paritet blir varje summa av två figurers areor jämn och kan därför omöjligt utgöra ett mätetal på någon annan figurs area. Själva nyckeln till problemet låg förborgat i en eventuell minneskunskap om udda och jämna tal, och vi fick ett exempel på förmågan att minnas matematiska idéer, strukturer eller lösningsstrategier.

Krutetskii använder termen ”a mathematical cast of mind” för individer med synnerlig matematisk begåvning. Förutom att de kan visa upp alla eller de flesta av förmågorna, är de mer eller mindre besatta av att matematisera vardagstillvaron. Får en person med ett ”mathematical cast of mind” syn på en tidtabell från SJ, infinner sig kanske en instinkt att genast beräkna medelhastigheten. Passerar personen mejeriavdelningen i en matbutik uppstår eventuellt behovet att exakt och i huvudet räkna ut med hur många procent literpriset på mjölk skiljer sig åt om man köper den i 1-liters eller i 1,5 -literspaket.

Vissa av dessa matematiskt särbegåvade elever anpassar sig väl till skolmiljön och presterar goda resultat och får höga betyg, men det gäller långt ifrån alla. Roland S Persson har i en undersökning med ett stort antal särbegåvade vuxna funnit att 95 % av dem beskriver sin skoltid som ”ett helvete”.

Vilka är de barn och ungdomar som på grund av sin särskilda fallenhet för matematik vantrivs med skolmatematiken och stannar upp eller retarderar i sin förmåga? Det saknas inte fallbeskrivningar. Vi känner dem kanske också från vår egen lärarpraktik eller som karaktärer i skönlitteraturen. Den skoltrötte Jonny i Lars Gustafssons *Yllet*, och Viktor i Håkan Nessers *Skuggorna och regnet* har flera av de typiska drag som särbegåvade barn visar upp. Gemensamt för dem är att de är missanpassade i skolan och även i olika sociala miljöer. De hör alltså inte till gruppen ”högpresterande” utan snarare till de ”högprotesterande” för att låna ett uttryck från Anita Kullander.

Skolan har alltså inte lyckats att möta dessa elevers särskilda behov. Men läget är ändå inte hopplöst. Sent omsider har Skolverket lyckats värka fram ett stödmaterial för lärare med tips om hur man kan hantera elever med särskild begåvning. Krutetskiis ande besjälar detta i många stycken utmärkta material. Vilket genomslag det sedan får återstår att se.

Krutetskiis arbete har ofta legat till grund för olika screeningsstudier av skolbarn i syfte att tidigt upptäcka matematikbegåvningar och sedan fostra dessa. Handböcker och forskningsartiklar om *gifted education* hänvisar ofta till Krutetskii och menar att den eller den förmågan ska man särskilt försöka utveckla. Och visst finns det en poäng här. Två av Krutetskiis förmågor handlar om just det man brukar beteckna som kreativa kvaliteter; nämligen förmågan till flexibilitet i tanken och förmågan att vända en tankegång och närma sig problemet från ett annat håll. Kreativitet, särskilt inom matematikämnet, är något som skolundervisningen genom åren inte lyckats så väl med att fostra.

Att spåra upp och identifiera särbegåvade barn är förvisso en högst angelägen uppgift, men Krutetskii sätter målet högre än så. Han skriver till exempel att:

> *The basic goal toward which a scientific elaboration of the problem of mathematical abilities should be directed is to create psychological foundations for an active pedagogy of abilities.*

Detta kan man kalla Krutetskiis vision av matematikundervisningen. Han utvecklar dock inte idén ytterligare utan lämnar över det till kommande generationers pedagoger. Det är lätt att föreställa sig att en sådan pedagogik måste ha ett starkt inslag av problemlösning och kanske till och med baseras på att eleverna löser utmanande problem. Är då denna ”pedagogy of abilities” som innebär ett starkt fokus på kreativ problemlösning och utveckling av matematisk förmåga, något för alla och inte bara för särbegåvade elever?

Anne Watson gjorde en intressant iakttagelse då hon lät en grupp svagpresterande elever få lösa samma utmanande problem som annars ansågs lämpade bara för de duktigaste. Klassrumsdiskussionerna som redovisas i hennes studie var på hög nivå och eleverna visade prov på utvecklat matematiskt tänkande. Hon fick anpassa sina instruktioner till denna nya elevgrupp och tiden de behövde arbeta sig igenom problemen fick bli något längre, men hela undervisningsprojektet, som omfattade tiotalet lektioner, blev en framgång och Watson kunde räkna in de flesta av Krutetskiis förmågor.

En egenhet hos den matematiska förmågan karakteriserad genom till exempel Krutetskiis system av förmågor, är att den är svårfångad och omöjlig att passa in i den typ av bedömningsmatriser som numera definierar matematiskt kunnande i skolan. I ett pedagogiskt klimat som inte främst tar sikte på resultatstyrning, kattrakning med kvasikvantiteter för att låna en term från Sven-Eric Liedman, skulle Krutetskiis ”pedagogy of abilities” sannolikt ha en plats.

I dagens new public management-skola har vi i stället det Skolverket valt att kalla *förmågor*. I sin utmärkta bok *Utveckla barns matematiska förmågor* ger Eva Pettersson och Inger Wistedt dessa så kallade förmågor det träffande epitetet ”färdigheter och vanor”. Som alla matematiklärare vet är dessa fem eller möjligen sju förmågor själva byggstenarna i kursplanernas kunskapsmål. Den mest auktoritativa tolkningen av förmågornas innebörd finner man i bedömningsanvisningarna för de nationella proven. De nationella proven i matematik blir därför ett viktigt styrinstrument av såväl lärare som elever och definierar vad nödvändig och tillräcklig kunskap i matematik är.

En matematikpedagogik som i stället tar fasta på bildning, kreativitet och utveckling av matematisk förmåga hör kanske inte hemma i vår tid. Finns det då någon anledning till optimism? Liedman spådde 2011 att vi möjligen 2030 kan vara på god väg mot den goda skolan, där bildning och inte nationella prov eller PISA-resultat står i fokus. I en sådan skola bejakas även omätbara och svårfångade entiteter, exempelvis matematisk förmåga.

Denna artikel bygger på resultat från författarens licentiatuppsats *Problemlösning kan avslöja matematiska förmågor: Att upptäcka matematiska förmågor i en matematisk aktivitet* vid Linnéuniversitetet och som finns fritt tillgänglig i fulltext. Länk till uppsatsen, litteraturlista till artikeln och förteckningar över tidigare artiklar som ansluter till denna finner du på Nämnaren på nätet.