

Expert i matematikklassrummet

Vad är det som kännetecknar skickliga matematiklärare? Artikelförfattaren har följt en erkänt duktig matematiklärare och sett hur han bedriver sin undervisning. Ett viktigt inslag är att läraren vill veta hur eleverna tänker och han får viss insyn i det då eleverna genom att rita bilder visar en del av sina tankar. Illustrationer används på fler sätt och några exempel ges i artikeln.

Det finns mycket kritik som förs fram om skolan i allmänhet samtidigt som många människor vill visa hur det borde vara i skolan. Ett skolämne som ofta diskuteras i media, bland skolforskare och skolpersonal, är matematik. Lärare som undervisar i matematik blir ofta föremål för diskussioner som handlar om att de inte gör ett fullgott jobb då det är så många elever som inte klarar målen i just matematik. Liknande diskussioner klarar sig ofta lärare i samhällsvetenskaplig ämnen, språkämnen och estetiska ämnen ifrån. Trots denna kritik finns det många matematiklärare i våra svenska skolor som lyckas bra. Kunskaper om deras undervisning skulle kunna bidra med en annan och förmodligen mer positiv bild av lärararbetet än de ödesmättade beskrivningar som ofta förs fram i media. För att kunna ge en sådan bild behöver vi veta mer om vad dessa individer, de skickliga matematiklärarna, egentligen gör. I denna artikel får vi följa Leif, en matematiklärare som såväl skolledare och kollegor som elever, före detta elever och föräldrar uppfattar som en skicklig matematiklärare. Mer specifikt ska vi ta en titt på hur Leif arbetar med bilder.

Bilder av matematik

Bilder är centrala i Leifs undervisning. De används dels för att avbilda och schematisera laborativa modeller och omvärldssituationer, dels för att illustrera den matematik som för tillfället bearbetas. I Leifs undervisning förekommer bilder på åtminstone tre olika sätt a) bilder av en matematisk tanke, b) illustrerande bilder för förståelse och c) bilder för förståelse och görande.

Bilder av en matematisk tanke

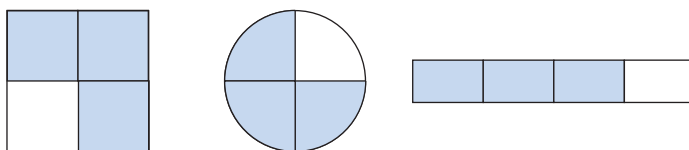
Eleverna skapar egna bilder av matematiken och använder sig av dessa när de visar hur de tänker. Ett återkommande mönster i undervisningen är Leifs fråga till eleverna: Vad är *din* bild av ...?

Genom att ställa den frågan uppmuntras eleverna att skapa egna bilder av den matematik som bearbetas samtidigt som eleverna ges en möjlighet att upptäcka att alla i klassen inte har samma bild av de olika matematiska fenomenen. Ett exempel kan vara när eleverna uppmanas rita sin bild av 75 % på tavlan.

I forskningsrapporten *Den skicklige matematikläraren* finns en mer utförlig beskrivning av vad som kan känneteckna en skicklig matematiklärare. Länk till rapporten finner du på Nämnaren på nätet.



Följande varianter är exempel på olika bilder eleverna gav av 75% vid det aktuella undervisningstillfället.

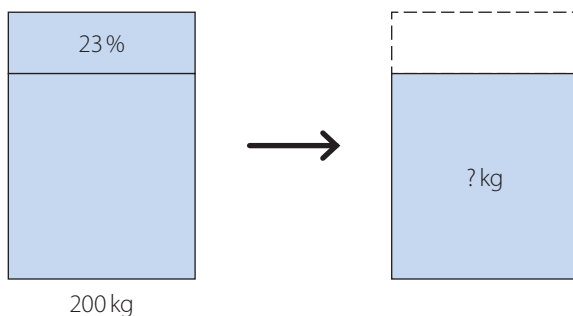


I bilderna ovan ser vi att när eleverna ritat sin bild av 75% så använder de sig uteslutande av geometriska figurer som de mött i skolmatematiken. Det är få för att inte säga ingen som till exempel illustrerar 75% med ett glas som är fyllt till tre fjärdedelar. En orsak till det kan vara att en sådan bild inte är lika lätt att göra så exakt som ovanstående bilder.

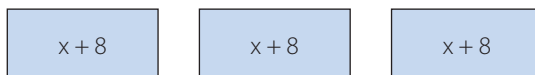
Illustrerande bilder för förståelse

Leif använder också bilder vid genomgångar för att konkretisera matematiken. Det kan handla om bilder som illustrerar 75% vilket visades ovan, men det kan också handla om bilder som illustrerar matematiska operationer. Två exempel på den typen av bilder visas nedan. I det första exemplet vill Leif illustrera tankefiguren för uppgiften:

Hur många kg vete har en bonde kvar som har förbrukat 23% av sina 200 kg?



I ett annat exempel vill Leif övertyga eleverna varför man måste multiplicera båda termerna när en förenkling av följande uttryck ska göras: $3(x+8)$. Leif påpekar att det står ett osynligt multiplikationstecken mellan trean och parentesen. Leif ritat:



Vi har alltså tre stycken x och tre stycken 8 or som vi kan skriva som $3x+24$. Denna bild ger eleverna en möjlighet att se hur ett uttryck kan delas upp, bilden illustrerar de delar som finns att manipulera med i räknandet. I relation till denna typ av konkretiseringar är det vanligt förekommande att Leif säger: *Och då ser man ju...* Genom sina tidigare kunskaper i matematik ska dessa enkla bilder stötta eleverna i deras förståelse av det matematikinnehåll som bearbetas.

Bilder för förståelse och görande

Leif har också skapat egna bilder som han skämtsamt kallar *Leifs magiska lapp* eller *Leifs magiska streck* som ska stötta eleverna i deras matematikutövning. Förutom att eleverna har nytta av dessa verktyg när de arbetar med matematik kan de också hjälpa dem att förstå matematiken. Den magiska lappen används när eleverna arbetar med ekvationer av typen:

$$\frac{x}{4} + 6 = 8$$

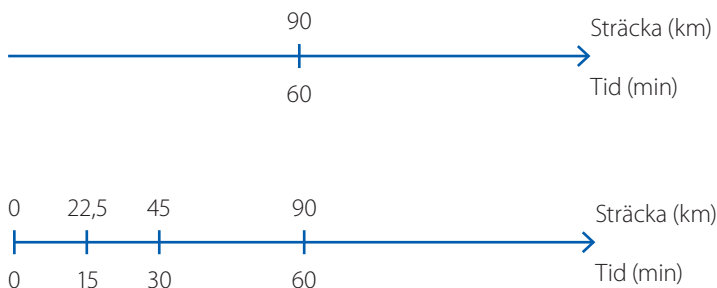
Leif uppmanar eleverna att riva av en liten papperbit som de kan hålla över uttrycket $x/4$ för att de enkelt ska se vad $x/4$ är detsamma som. På den tomma lappen skrivs vad (2) som måste läggas till 6 för att det ska vara lika med 8.

$$[\quad] + 6 = 8$$

Eleverna ser då att $x/4$ är lika med 2. Någonting delat med fyra ska vara två.

Det magiska strecket är en annan artefakt som Leif och eleverna använder sig av när de arbetar med hastighet, sträcka och tid-problem. Det är Leifs vilja att eleverna ska lära sig att se relationer och proportioner. Detta är således bara ett exempel av många där undervisningen fokuserar på hur matematiska begrepp är relaterade till varandra. Ett exempel på hur det magiska strecket kan användas är när eleverna ska räkna ut hur långt en bil hinner på 15 min, 30 min och två timmar om bilen kör med en hastighet om 90 km/tim. Eleverna och Leif ritar då upp ett streck som initialt alltid är 1 h eller 60 min. Därefter bygger de vidare med den information som finns i uppgiften.

Genom att eleverna vet att bilen hinner 90 km på 60 min kan de via det magiska strecket enkelt rita upp hur långt de hinner på 30 min och 15 minuter. Det eleverna måste inse är att de delar 90 på samma sätt som de delat 60. Eleverna använder sig av ett proportionalitetstänkande.



Att se för att förstå

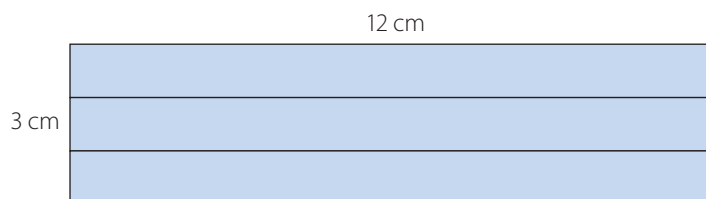
Vi har sett hur Leif använder sig av bilder för att eleverna ska tillägna sig egna bilder av matematiken så att de förstår. En undervisningssekvens som exemplifierar hur Leif arbetar med bilder och andra representationsformer visas nedan. Genomgången syftar till att eleven ska inse att olika bråk kan vara lika stora samt hur man förlänger och förkortar bråk.

Leif: Rita en rektangel med sidorna 12 cm och 3 cm.

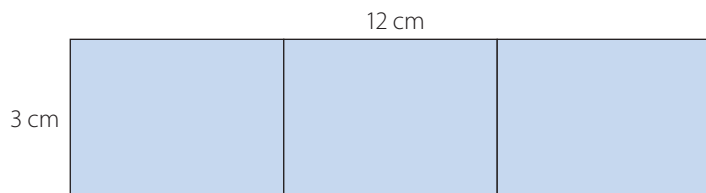


Leif: Nu vill jag att du ritar så att man ser tredjedelar.

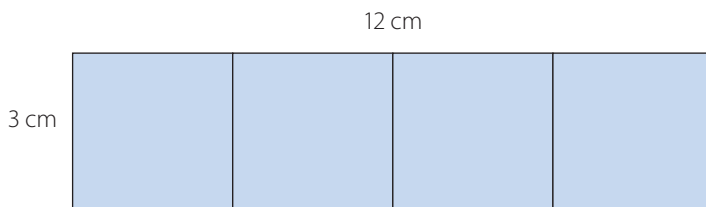
Eleverna ritar in sina tredjedelar på flera olika sätt. Det vanligaste förekommande är följande:



Leif: Nu vill jag att du ritar en bild där du ritar in tredjedelar fast inte likadant. Eleverna som ritade som ovan ritar på nedanstående sätt.

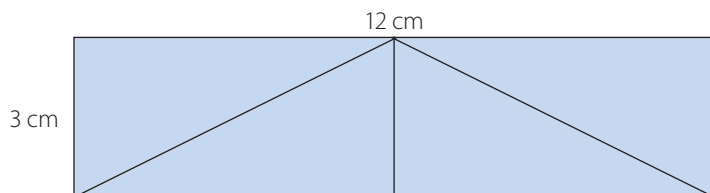


Leif går ett varv i klassrummet och tittar hur eleverna har ritat. På så vis får han möjlighet att göra en bedömning av hur eleverna representerar tredjedelar. När han tittat på hur alla elever har löst uppgiften genomförs samma procedur med fjärdedelar. Den första representationen av fjärdedelar ser i princip ut på samma sätt hos samtliga elever.



När eleverna ska göra en annan representation av fjärdedelar stöter många på problem. Eleverna har inte fått någon egentlig undervisning av hur de ska göra för att dela in en figur i delar.

Ett exempel som dyker upp är följande.



För att få en bild av vilka tankefigurer de skapat när de ritat sina figurer inleder Leif en diskussion.

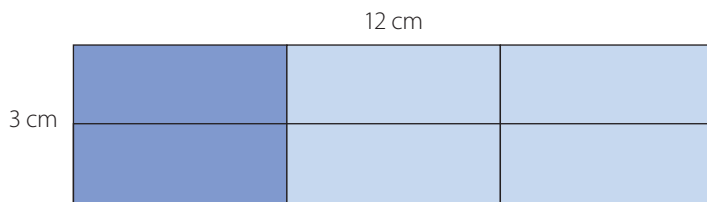
Leif: Hur ska man göra för att få reda på hur stor tex en fjärdedel är?

Elev: Man delar alla smårutor (i räknehäftet finns varje kvadratcentimeter symboliserad med små rutor) med delen man vill dela upp i.

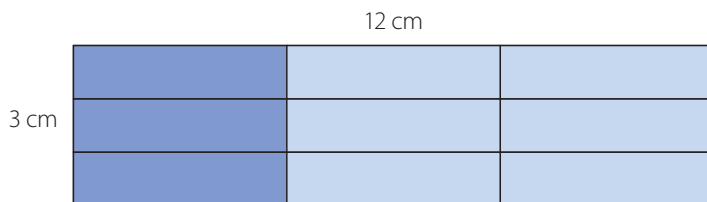
Leif tittar frågande på eleven.

Leif: Tänker du så här? Om vi ska dela in vår figur i fjärdedelar så tänker vi så här. Hur många smårutor är det? $3 \cdot 12 = 36$ rutor. Det antalet delar vi upp i fyra högar, $36/4 = 9$. Då vet vi att varje fjärdedel innehåller 9 rutor. Snyggt!

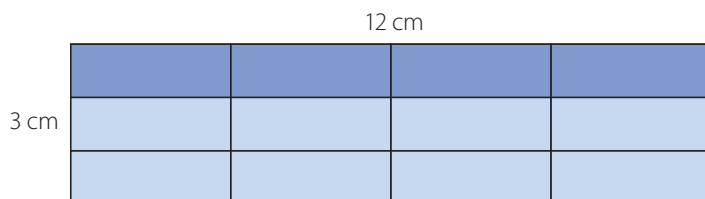
Genom att arbeta med flera olika exempel ställs eleverna inför olika utmaningar som ger dem möjligheter att upptäcka mönster. I det här fallet, hur de ska göra för att dela upp en figur i ett bestämt antal delar. Därefter fortsätter ett resonemang om relation mellan olika bråk. Leif undrar om någon kan visa vad det är för samband mellan tredjedelar och sjättedelar. Några elever ritar nedanstående figur och Leif ritar av den på tavlan.



Jaha, säger Leif, så två sjättedelar är en tredjedel, spännande! Vad finns det då för samband mellan tredjedelar och niondelar? Eleverna ritar och visar Leif hur de tänker.



Leif: *Jaha, så det krävs tre stycken niondelar för att få ihop till en tredjedel, kul. Nu kommer nästa uppdrag: tolfte delar och tredjedelar.* Eleverna ritade sina figurer och presenterade dem för Leif som gick runt i klassrummet.



Eleverna har nu getts möjlighet att se att det finns en relation mellan olika tal i bråkform. De har använt den matematik de redan kan för att göra beräkningarna. Efter det här arbetet så har de fått en bild, en representation, av de olika bråken och deras relationer. Vi kan här tala om att undervisningen framförallt har befunnit sig på en relativt konkret nivå då det varit konkreta bilder som använts. I det aktuella exemplet illustreras också en del av Leifs professionskunskap. Främst handlar det om en kunskap om hur det matematiska innehållet kan representeras och vad som är lämpligt för den aktuella målgruppen. Samtidigt visar han hur han i detta fall ser på lärande. Han låter eleverna, under styrning, rita och försöka hitta det mönster som han är ute efter. Kännetecknande för Leifs agerande är det genuina intresse för elevernas tankar som han visar och som sedan ligger till grund för fortsatta beslut om hur undervisningen ska bedrivas i relation till det mål som är satta med lektionen.

Lektionen fortsätter.

Leif: Vi visade att $2/6 = 1/3$, stämmer det?

Klassen håller med.

Leif: Det jag funderar på nu är om man kan räkna på dessa så att man förstår att det stämmer. Vi vet ju nu att det stämmer när vi ritade men kan man räkna på det?

(Leif ser riktigt fundersam ut). Ingen av eleverna svarar.

Leif: Då ska jag visa er något magiskt. Om jag delar täljaren och nämnaren i $2/6$ med 2, vad får jag då? $(2/2)/(6/2)$, det blir 1 i täljaren och 3 i nämnaren, det vill säga en tredjedel. Motsatsen om vi går från en tredjedel till två sjättedelar skulle kunna se ut så här:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

A diagram showing the conversion of $\frac{1}{3}$ to $\frac{2}{6}$. A blue arrow points from the denominator 3 to 6, labeled "x 2". Another blue arrow points from the numerator 1 to 2, labeled "x 2".

Leif: När vi dividerar med 2 kallas det att vi förkortar. Och när vi multiplicerar med två så kallas det att vi förlänger.

$$\begin{array}{ccc} & \div 2 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowleft \\ \frac{2}{6} & = & \frac{1}{3} \\ \curvearrowleft & & \curvearrowright \\ & \div 2 & \end{array}$$

Därefter gör Leif och klassen samma moment med ett antal bråk. Varje gång han gör sina förlängningar och förkortningar så refererar han tillbaka till de figurer som eleverna har ritat eller så illustrerar han det med en ny figur.

Genuint intresse

Vi har sett hur en av omvärlden uppskattad matematiklärare arbetar med att konkretisera matematiken. Leif vill hjälpa eleverna att tillägna sig bilder som ska hjälpa dem att förstå matematiken. Genom att hela tiden utgå från elevernas bilder och förståelse för olika matematiska fenomen driver han sin undervisning framåt mot de mål som är satta för lektionen. *Det är Leif som planerar och undervisar eleverna.* Samtidigt görs ofta dessa planeringar utifrån vad som har kommit upp på en tidigare lektion eller under lektionen. Leifs genuina intresse för hur eleverna tänker är vägledande i nästan varje undervisningsbeslut.

LITTERATUR

- Hagland, K. (2007). Rita en bild. *Nämnanen* 2007:3.
- Samuelsson, J. (2013). *Den skicklige matematikläraren*. Forskningsrapport. Linköpings universitet. Institutionen för beteendevetenskap och lärande. Tillgänglig 2015 04 16 på <http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:615567>