

Omkrets och area

Det är inte ovanligt med missuppfattningar kopplade till begreppen omkrets och area. I denna artikel ges förslag på hur lärare kan resonera tillsammans med eleverna om förhållanden mellan de båda begreppen så att de kan få en djupare förståelse för dem.

En av de mer återkommande missförstånden bland både elever och blivande grundskollärare handlar om kopplingen mellan omkrets och area. Även om det är minst lika vanligt med problem att hålla isär de båda begreppen kommer denna artikel inte att handla om just det.

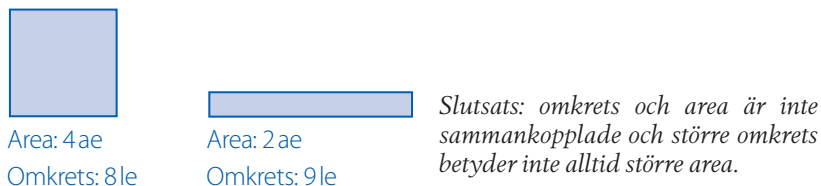
Jag insåg nyligen att jag nu har undervisat "enklare" matematik så länge att jag själv har börjat missa djupare insikter och idéer som kan dyka upp i annars till synes enkla matematiska problem. Det jag vill dela med mig av här är några frågor som rör vanliga missförstånd men som också innehåller mer djup än man först kan tro.

Betyder längre omkrets större area?

Det är vanligt att elever tror att en längre omkrets alltid är kopplat till en större area och att när olika figurer har samma omkrets betyder det att de har samma area. En vanlig konkret aktivitet som många lärare använder för att förebygga detta missförstånd är att låta elever visa olika rektanglar med ett hopknutet rep. Eleverna kan stå i rektanglar de skapar för att få ett mått på arean. De upptäcker snart att de kan skapa rektanglar med olika areor och inser att då det är samma rep måste de olika stora rektanglarna ha samma omkrets.



Man kan också ändra omkretsen åt ena hållet (i följande exempel ökar den) och area åt det andra (i exemplet minskar den):



Läraren är nöjd med att ha lyckats reda ut ett vanligt missförstånd. Men är detta verkligen sant? Håller alltid slutsatsen? Situationen är mer komplicerad och mer intressant än många kanske tänker på.

Om du vet omkretsen av en cirkel kan du då räkna ut dess area?

Det går alltid att göra:

$$area = \pi \cdot \left(\frac{omkrets}{2\pi} \right)^2$$

En cirkel med en större omkrets har alltid en större area. Slutsatsen håller plötsligt inte.

Finns det andra "vanliga" geometriska former som du kan räkna ut arean på om du vet omkretsen?

Ja, det går att göra med exempelvis alla regelbundna månghörningar.

Lite mer komplicerat

Förhållandet mellan omkrets och area börjar bli lite mer komplicerat. Kan vi hitta ännu mer djup i det? Här är några frågor att fundera över:

1. Om du har två godtyckliga rektanglar, A och B, och vet att omkretsen av A är längre än omkretsen av B, kan du då veta vilken rektangel som har den största arean?
2. Om du har en godtycklig rektangel och en godtycklig cirkel, och rektangeln har en längre omkrets än cirkeln, kan du då veta vilken av dem som har den största arean?
3. Om du har en godtycklig rektangel och en godtycklig cirkel, och cirkeln har en längre omkrets än rektangeln, kan du då veta vilken av dem som har den största arean?

Vi har redan sett att svaret på fråga 1 är nej – för just godtyckliga rektanglar innebär inte en längre omkrets alltid en större area. Frågorna 2 och 3 är lite mer intressanta och här kommer vi till en ny nivå av förståelse. Hur skulle en elev kunna svara på frågorna? Vi kan tänka oss fyra elever på olika nivåer av förståelse:

- ♦ en elev med det ursprungliga missförståndet svarar ja på frågorna 2 och 3: en längre omkrets betyder en större area
- ♦ en elev som precis har gått igenom övningen med rektanglar säger nej till frågorna 2 och 3: vi kan inte veta någonting om area utifrån omkretsen
- ♦ en elev som har gått vidare och insett att det är annorlunda för cirklar säger ja till frågorna 2 och 3: eftersom vi kan räkna ut arean av en cirkel från omkretsen
- ♦ en elev som har en djupare förståelse säger att det saknas information här, detta kräver en djupare analys.

Vad är då svaren på frågorna 2 och 3? Hur skulle vi eller en elev kunna resonera här? För att reda ut svaren, utan att använda allt för mycket algebra, behöver vi några viktiga förkunskaper som är ganska vanliga att de tas upp i geometriundervisningen.

Viktig förkunskap 1: Av alla rektanglar med samma omkrets är en kvadrat den med störst area.

Det finns många intressanta sätt att bevisa påståendet. Jag visar en enkel metod här:

- ♦ anta att vi har en kvadrat med sidolängd x
- ♦ då är omkretsen $4x$ och arean x^2
- ♦ vi ändrar nu längd på sidorna för att skapa en ny rektangel med samma omkrets, så om vi minskar två sidor med a behöver vi öka de andra sidorna lika mycket
- ♦ den nya rektangeln har då arean $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$ som måste vara mindre än x^2 för alla möjliga värden på a .

Hur kan vi använda denna kunskap? Från detta följer att om en godtycklig kvadrat har en längre omkrets än en godtycklig rektangel måste den också ha en större area. Observera att detta inte fungerar åt andra hållet: om en godtycklig rektangel har en längre omkrets än en godtycklig kvadrat kan vi inte utifrån det veta vilken av dem som har den största arean.

Viktig förkunskap 2: Av alla figurer med samma omkrets är en cirkel den med störst area.

Jag bevisar inte detta påstående här, men det är viktig kunskap och har stor relevans i både matematik och fysik, som exempelvis varför bubblor är sfäriska.

Nu har vi tillräckligt mycket information för att svara på de två sista frågorna ovan. Svaret på fråga 2 är nej, vi kan inte utifrån detta veta vilken som har den största arean. Men svaret på fråga 3 är ja. Vi kan faktiskt veta att om en cirkel har en större omkrets än en rektangel måste den också ha en större area.

Det finns mer djup att utforska i frågorna. En intressant följdfråga är till exempel vilken extra information som krävs för att kunna svara på fråga 1 och fråga 2. Jag lämnar detaljerna till läsaren, men ger lite tips och en början här:

Hur ändras fråga 1 om vi också känner till förhållandet mellan rektangelnars sidor? Svaret här är att det beror på. Man måste då dela upp frågan i två underfrågor där man tittar på vilken rektangel som är mest "kvadratisk".

Från en inledning med att motverka ett vanligt missförstånd på grundläggande skolnivå har vi kunnat utveckla mycket djupare och mer intressanta frågor inom geometri.

I NCM:s Strävor finns två aktiviteter som tydligt belyser samband mellan omkrets och area: Färgfläckar och Area med stickor

