KÄNGURU SIDAN

Ekvationer i ett sammanhang

Denna artikel har tidigare publicerats i Tangenten nr 4, 2021. Författaren Anne-Gunn Svorkmo arbetar på det norska matematikcentrat, bland annat med Kängurutävlingen. Här har en översättning och viss bearbetning gjorts, till exempel att elevåldrarna är anpassade till svenska förhållanden.

Det finns likheter mellan en del problem i Kängurutävlingen. I vissa problem används tärningar på ett eller annat sätt, andra har sifferkort eller pusselbitar som ett vanligt inslag. Här ska jag titta närmare på problem där vågar är det som är lika. När det är en köksvåg på bilden frågas ofta om värdet på ett av föremålen. Problem med balansvåg handlar om vikter i balans, vikter som inte är i balans eller en blandning av de två. Lösningen går att finna genom ett logiskt resonemang utifrån vilka föremål som väger lika, eller vilka som väger mer eller mindre än andra. Oavsett vad som efterfrågas finns det en gyllene regel i den här typen av problem; objekt med samma form eller färg står för samma värde.

Jag vill lyfta fram några problemlösningsstrategier som jag tror är specifika för den här typen av uppgifter. Strategin ”gissa och pröva” finns inte bland dessa, men jag vill ändå nämna att strategin kan fungera bra på många av de enklaste problemen. Elever som inte känner till den här sortens problem, men som har använt ”gissa och pröva” som procedur i andra sammanhang, använder ofta denna strategi. På så sätt kan många komma fram till rätt lösning. När den används på ett systematiskt sätt kan den vara en effektiv strategi. Den är generell och kan användas på många problemlösningsuppgifter, men hör inte till dem jag skulle kalla specifika för den typ av problem jag valt att titta närmare på.

Övningar med vikter eller vågar är egentligen ekvationer som satts in i ett sammanhang. Jag kommer att visa ett exempel på hur ett av viktproblemen kan representeras i form av en ekvation. I den här artikeln koncentrerar jag mig mer på problemlösningsstrategier, och min tanke är att elever från årskurs 3 och uppåt kan arbeta med ekvationer i ett sammanhang, utan att kunna något om ekvationer. När eleverna kommer till högstadiet för att utveckla sin kompetens i att kunna skapa, lösa och förklara ekvationer knutna till praktiska situationer kan erfarenheter från problem de tidigare arbetat med göra det lättare för dem att se samband och hur dessa kan representeras med ekvationer.

Vikter på en köksvåg

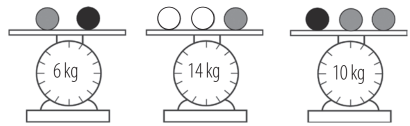
I problemen nedan innehåller bilderna nästan all information som behövs för att komma fram till lösningen. Eleverna behöver titta noga för att få information som de kan resonera vidare utifrån. En första fråga som kan hjälpa dem att veta vad de ska titta efter på bilderna kan vara:

Vad är likt och vad är annorlunda?

Genom att granska bilderna i uppgiften får eleverna veta vad som väger lika, vad som väger mer eller mindre än något annat. Sedan ska eleverna sortera de fakta de har fått; vissa kan vara viktigare än andra, medan vissa bygger på varandra. Det är ofta i en information som nyckeln till lösningen ligger och det är här de speciella problemlösningsstrategierna kan vara bra att känna till.

10 På vågarna ligger grå, vita och svarta bollar. Bollar som har samma färg väger lika mycket.

Hur mycket väger en vit boll?



A: 3 kg B: 4 kg C: 5 kg D: 6 kg E: 7 kg

Problem från Ecolier 2021.

Resonemang

Om jag vet hur mycket en grå boll väger så blir det lätt att ta reda på hur mycket en vit boll väger. Jag får den informationen genom att studera vågen i mitten. Jag måste gå via en grå boll för att hitta vikten av en vit boll och en vit boll finns bara på mittenvågen.

Den första och den sista vågen har något gemensamt, och det är att på båda finns grå och svarta bollar. Skillnaden mellan de två vågarna är en grå boll och skillnaden är 4 kg, så då måste en grå boll väga 4 kg. Jag kan sedan använda denna information för att ta reda på hur mycket en vit boll på den mittersta vågen väger. Två vita bollar väger totalt 10 kg, alltså 5 kg styck.

Det beskrivna resonemanget är en procedur bland många, och att hitta skillnaden mellan två vågar är en speciell problemlösningsstrategi för sådana uppgifter. Eleven ska ta reda på vilka två vågar som kan ge användbar information för jämförelse. Det finns bara tre kombinationsalternativ när det finns tre vågar. Den inledande frågan jag nämnde tidigare, vad som är likt och vad som är annorlunda, kan vara till hjälp.

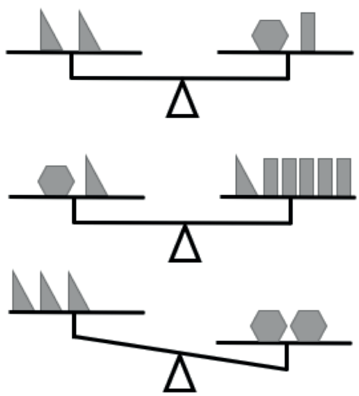
Elever som har löst problemet (ursprungligen avsett för elever i årskurs 3 och 4), kanske inte är medvetna om att de har löst en uppsättning ekvationer med tre okända. Problemet kan också representeras som ett ekvationssystem med tre okända och lösas på samma sätt som beskrivits ovan:

$$x + y = 6$$
$$2z + x = 14$$
$$2x + y = 10$$

Vikter på en balansvåg

Jämviktsprincipen och förståelsen av varför det är möjligt att subtrahera eller addera samma tal på båda sidor om likhetstecknet illustreras ofta med hjälp av en balansvåg. De elever som inte känner till *jämviktsprincipen* och hur den kan användas i sammanhanget kommer att få svårt att komma igång. Detta gäller särskilt i problem där denna strategi är den mest effektiva och kanske den enda som kan leda till en lösning.

24 På vågarna ligger sexhörningar, rektanglar och trianglar.



Vad ska vi lägga till på vänstra sidan i den tredje vågen för att det ska väga jämnt?

A: 1 triangel B: 2 trianglar C: 1 sexhörning
D: 1 rektangel E: 2 rektanglar

Problem från Ecolier 2021.

Resonemang

Nyckeln till problemet, som jag ser det, ligger i att hitta exakt det föremål som kan tas bort på båda sidorna i vågen.

Jag studerar de två översta bilderna där vågen är i balans, och ser att det på den andra bilden finns en triangel på både höger och vänster sida. Jämvikt upprätthålls även om triangeln tas bort på båda sidorna. Då upptäcker jag att *en sexhörning väger lika mycket som fem rektanglar.*

Jag kan använda denna information på den översta vågen och dra slutsatsen att två trianglar väger lika mycket som sex rektanglar. Om jag halverar antalet trianglar och antalet rektanglar så vet jag att *en triangel väger lika mycket som tre rektanglar.*

På den nedersta vågen som inte är i balans kan jag se att tre trianglar väger mindre än två sexhörningar. Detta beror på att tre trianglar väger lika mycket som nio rektanglar medan två sexhörningar väger lika mycket som tio rektanglar. Den nedersta vågen kommer i balans om jag lägger till en rektangel på den vänstra sidan.

Problemet placerades sist i Ecolier i Kängurutävlingen 2021, eftersom den ansågs utmanande för elever i årskurs 4–5 (vilket motsvarar årskurs 3–4 i Sverige). Av eleverna som registrerat sina resultat på den norska webbplatsen efter Kängurutävlingen hade 15 % av eleverna i 4:an och 25 % av eleverna i 5:an löst problemet rätt.

Lika volym – olika flaskor

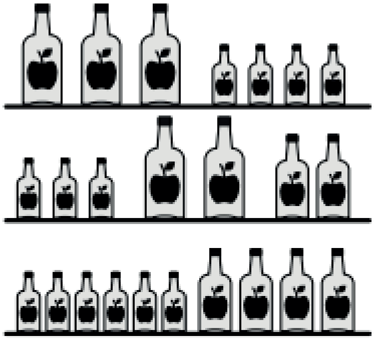
Vid första anblicken liknar nästa problem inte ett vågproblem. Det är ett annat sammanhang, men har vissa matematiska likheter med de båda vågproblemen. Eftersom varje hylla innehåller samma mängd äppeljuice kommer vi också här att kunna använda jämviktsprincipen baserad på volym med äppeljuice.

Även detta problem var det sista i tävlingen för den klassen. Av de norska elever som registrerade resultaten hade 30 % av eleverna i 8:an (motsvarar årskurs 7 i Sverige) valt rätt svarsalternativ. Det är sällan så många som har svarat rätt på den sista uppgiften i en tävlingsklass. Jag skulle tro att de flesta eleverna löste problemet med strategin ”gissa och pröva”, och då är det kanske inte så svårt som vi trodde när ordningen på problemen bestämdes.

Hur skulle du ha gått tillväga för att lösa problemet nedan? Vilken strategi skulle du använda? Lös gärna problemet själv innan du läser vidare.

23 På varje hylla på bilden finns det totalt 64 dl äppeljuice.
Flaskorna finns i tre storlekar: stor, mellan och liten.

Hur många deciliter rymmer en mellanstor flaska?



A: 3 dl B: 6 dl C: 8 dl D: 10 dl E: 14 dl

Problem från Benjamin 2021 (i den svenska versionen är det problem 24 och lite annorlunda formulerat).

Resonemang

Ett sätt att lösa problemet är att halvera antalet flaskor på en av hyllorna. Det finns bara en hylla där det går att göra utan att behöva använda halva flaskor. Tar jag hälften av flaskorna på nedersta hyllan (det vill säga *tre små flaskor och två mellanstora flaskor*) så vet jag att de innehåller totalt 32 dl äppeljuice. Samma grupp flaskor finns på mittenhyllan, och skillnaden mellan innehållet i de två hyllorna är två stora flaskor som tillsammans måste innehålla 32 dl äppeljuice (64 – 32 = 32). Då vet jag att en stor flaska innehåller 16 dl äppeljuice och jag har fått fram informationen som leder mig mot lösningen av problemet.

En fördubbling av antalet flaskor kommer att fungera på samma sätt som en halvering, men då är det mittenhyllan jag ska utgå ifrån. Fördubblar jag innehållet på denna hylla får jag *fyra stora flaskor, fyra medelstora och sex små flaskor* som tillsammans kommer att innehålla 128 dl äppeljuice. Skillnaden mellan flaskor och mängd juice på den "dubbla" hyllan och innehållet på den nedre hyllan är fyra stora flaskor och totalt 64 dl äppeljuice. Utifrån denna information hittar jag hur mycket äpplejuice det finns i en stor flaska.

Användbara strategier för ekvationslösning

Jag har visat exempel på några strategier som jag tycker är väl lämpade för problemlösning där ekvationer satta i ett sammanhang är inblandade på ett eller annat sätt. *Jämförelsestrategin*, som beskrivs i det första exemplet, innebär att dra fördel av att något är nästan exakt lika. Den lilla skillnaden det handlar om här ger viktig information som kan användas vidare i problemet. När elever på högstadiet ska lösa ekvationssystem kan de använda denna strategi genom att subtrahera en ekvation från en annan.

Högstadieelever har även stor nytta av strategier som bygger på *jämviktsprincipen*, där samma föremål kan tas bort från båda sidorna på en balansvåg. Om jag jämför med algebraiska uttryck gör jag samma sak när jag subtraherar lika mycket på båda sidor om likhetstecknet.

Halvering–dubbleringsstrategin är kanske den minst använda strategin av de tre bland problemen från Kängurutävlingen.

Ekvationssystem

Problemen som presenterats här kan också lösas som ett ekvationssystem med tre obekanta. Att göra uppgifter där detta sker i en vardaglig kontext kan leda till att övergången till en rent algebraisk lösning blir mer begriplig för eleverna. Problemen uppmuntrar till logiskt tänkande och logiska resonemang och är i den bemärkelsen en undervisningsresurs för arbete med matematiska resonemang. Senare, när eleverna ska arbeta med algebra, kan sådana problem fungera som en bro mellan logiska strategier och mer formella representationer. När eleverna arbetar med ekvationer i vardagliga sammanhang måste de utforma sina egna resonemang utifrån den information de hittar genom att studera bilderna i uppgiften.

Resonemang i klassrummet

En presentation i klassrummet innebär att eleverna ska försöka förstå andra elevers resonemang och sedan jämföra dem med sina egna. Resonemang och argumentation är ett kärninnehåll i den norska läroplanen och beskrivs på följande sätt:

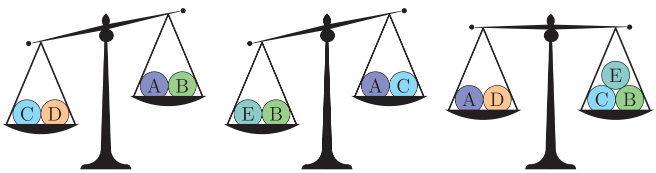
> *Resonemang handlar om att kunna följa, utvärdera och förstå matematiska tankegångar.*

Vidare bör eleverna uppmuntras att argumentera för sina resonemang för att bevisa att de har rätt. Resonemanget i samband med denna typ av problem kan vara både långa och komplexa och resonemangskompetens är något eleverna måste utveckla över tid.

Ett extra problem

För att visa mångfalden bland problemen i Kängurutävlingen tar jag med ytterligare ett liknande exempel.

18 Vi har fem kulor. De väger 30 g, 50 g, 50 g, 50 g och 80 g.



Vilken kula väger 30 g?

A: A B: B C: C D: D E: E

Problem från Benjamin 2018.

Anne-Gunn Svorkmo

Fler och enklare problem av den här typen finns på
matematikksenteret.no/kenguru och matematikk.org/julekalender

Motsvarande problem på svenska finns på
ncm.gu.se/kanguru och ncm.gu.se/adventsproblem