Andersson, Andrén, Eriksson & Tuominen

Skapa behov av multiplikation

Kan multiplikation förstås på något annat sätt än som upprepad addition? Här prövar författarna ett nytt sätt att undervisa om multiplikation. Genom att arbeta med indirekt mätning skapas ett behov av multiplikation.

Undervisning i multiplikation är ett återkommande ämne i matematikdidaktiska forskningssammanhang. Exempelvis diskuteras att elever behöver bli medvetna om multiplikation som någonting mer än endast upprepad addition.

Vår gemensamma erfarenhet som lärare är att upprepad addition är en vanlig ingång till multiplikation. Hur kan elever som uppfattar multiplikation som upprepad addition hantera en multiplikation med faktorer i decimalform, exempelvis $1{,}6 \cdot 0{,}3$? Vi frågade oss hur vi skulle kunna undervisa om multiplikation med fokus på multiplikativa istället för additiva strukturer. Med lärandeverksamhet som ram angrep vi utmaningen och designade en experimentlektion inspirerad av den ryska psykologen Vasily Davydov och hans forskarteam. Vår avsikt var att försöka skapa ett behov av att förstå multiplikation på flera sätt.

Multiplikation ur ett kulturhistoriskt perspektiv

Varför behöver vi förstå och hantera multiplikation? Multiplikation utvecklades sannolikt utifrån såväl mänsklighetens behov som människans nyfikenhet. Ett exempel som kan nämnas är när bönder och handelsmän sålde djur och den bonde som inte kunde multiplicera fick sälja och ta betalt för ett djur i taget, istället för att beräkna hela hjordens värde på en gång. Ett annat exempel är när nyfikna matematiker och filosofer utforskade primtalen, vilket innebar att de hade behov av både multiplikation och faktorisering.

Addition och multiplikation är två olika räknesätt. Även om en upprepad addition kan skrivas kortare som en multiplikation innebär det inte att alla multiplikationer kan förstås som upprepad addition. Multiplikation, till skillnad från upprepad addition, kan användas vid enhetsomvandlingar, exempelvis när centimeter omvandlas till meter. Multiplikation som struktur är grunden för flera matematiska områden som till exempel kombinatorik, förhållande, proportionalitet och skala. Multiplikation kan också utgöra en aspekt av indirekt mätning med hjälp av en specifik enhet. Det blev en ingång i vår experimentlektion.

Lärandemodell för multiplikation

Vi ville arbeta med multiplikation och ge eleverna möjlighet att samtala bortom numeriska exempel, därför genomförde vi en experimentlektion designad som en lärandeverksamhet. Grundantaganden för att designa undervisning utifrån detta ramverk är att elever ska ges möjligheter att arbeta med, och reflektera över, teoretiska begrepp och matematiska strukturer istället för att endast fokusera på att finna det ”rätta svaret”.

Elevernas uppgift var att ta reda på hur många små glas vatten som får plats i den stora hinken. I den kommande experimentlektionen skulle de därför ta reda på antal (a) små glas (A) som utgör volymen av den stora hinken (C) utan att konkret göra mätningen med varje enskilt litet glas. Antalet (b) av en mellanstor tillbringare (B) kan då fungera som ett redskap för en så kallad indirekt mätning av C. På så vis kan C så småningom uttryckas $a \cdot b \cdot \mathrm{A}$, vilket fortsättningsvis tecknas som $ab\mathrm{A}$. Eleverna tar därmed reda på hur många A som får plats i B, samt hur många B som får plats i C, vilket kan uttryckas som

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{B} & = & a\mathrm{A} \\ \mathrm{C} & = & b\mathrm{B} \\ b\mathrm{B} & = & ab\mathrm{A} \\ \mathrm{C} & = & ab\mathrm{A} \end{array}$$

För att diskutera volymen C (det vill säga $ab\mathrm{A}$) med eleverna sammanfattar Davydov detta i en lärandemodell som beskrivs $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$. Vi ville att eleverna skulle uppleva ett behov av ytterligare en enhet (i detta fall den mellanstora enheten B) för att underlätta mätandet och därigenom upptäcka fördelen med indirekt mätning. Det skulle då bli en mindre omständlig process än att använda den lilla kvantiteten A för att fylla den stora volymen C.

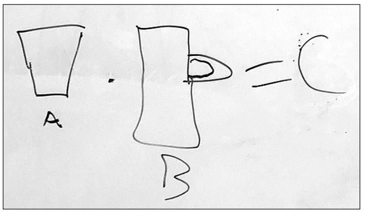
Experimentlektionen

Vi planerade först en situation där avsikten var att eleverna skulle uppleva ett behov av multiplikation som någonting annat än upprepad addition. Vi frågade oss hur vi skulle få eleverna delaktiga i en verksamhet som tydligare kopplar multiplikation till multiplikativa strukturer. Vilka frågor kan vi arbeta med? Vilka utmaningar behöver eleverna arbeta med?

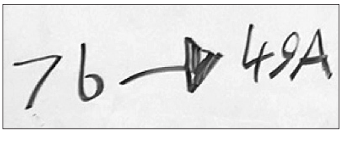
Väl i klassrummet fanns en hink (representerande den stora volymen C) och ett litet glas (representerande den lilla volymen A) till elevernas förfogande. I bakgrunden, på lärarens bord, fanns dessutom en tillbringare (i detta fall volymen B). Läraren bad eleverna om hjälp att ta reda på hur många små glas vattenhinken rymmer. När eleverna fick uppdraget, uttryckte en elev: ”Det här kommer ju att ta hela dagen!” En annan elev hade upptäckt tillbringaren som stod i bakgrunden på lärarens bord, pekade på den och sa: ”Men varför kan vi inte använda den där?” Vi tolkade elevernas kommentarer som att de upplevde det omständligt att mäta den stora volymen med den lilla enheten som glaset utgjorde, och såg en vinst i att använda den mellanstora enheten (tillbringaren). Eleverna drev arbetet med att utforska den multiplikativa strukturen genom att de gemensamt reflekterade och dokumenterade på tavlan. Läraren fanns med vid behov och stöttade elevernas teoretiska arbete med frågor:

- Hur gjorde ni för att komma fram till det här?
- Hur kan ni visa det?

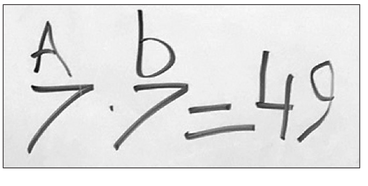
Eleverna ritade inledningsvis glaset och tillbringaren på tavlan och betecknade glaset som A och tillbringaren som B. De reflekterade över problemet och konstruerade modeller på tavlan som både innehöll schematiska bilder och algebraiska symboler. Hinken kom så småningom att få beteckningen C.



Det reflekterande och teoretiska arbetet fortsatte gemensamt på tavlan med att eleverna konstaterade att 7*b* motsvarade 49A, det vill säga att 7 tillbringare motsvarade 49 små glas. Eleverna symboliserade det som $7b \rightarrow 49A$.

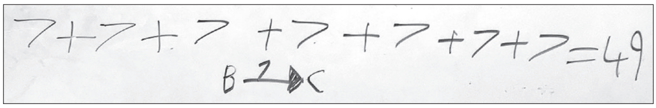


Läraren bjöd in till fortsatt reflekterande med frågan ”Hur menar ni?”. En elev svarade spontant ”Tänk om det är sju gånger sju?” och en annan elev skrev: $7 \cdot 7 = 49$, där A och *b* stod ovanför sjuorna ”För att vi ska veta vilken som är A och vilken som är *b*”.

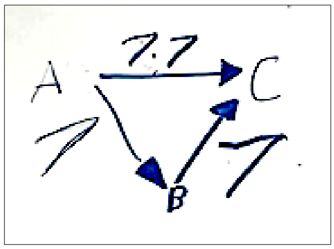


Läraren gav sig inte med denna förklaring utan ställde frågan ”Hur gjorde ni då?”. Eleverna förklarade då med att skriva 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 49 och fortsatte på tavlan att dokumentera detta som ”B blir till C”.

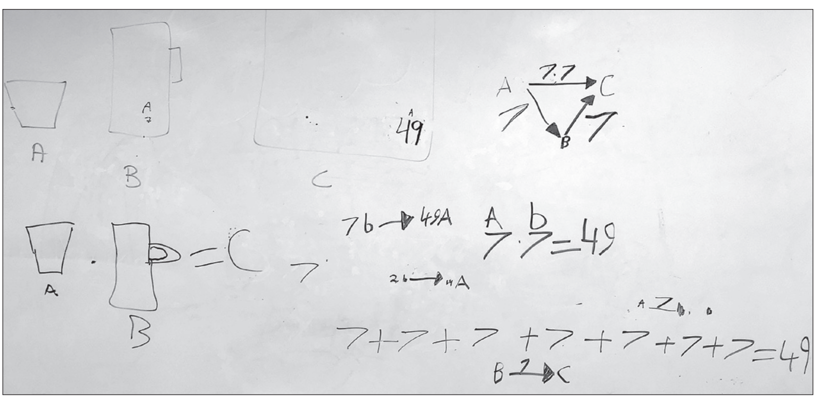
Läraren ställde frågan: Kan vi använda en symbol istället för att skriva ”blir till”och pekade samtidigt med hela kroppen från B till C. Eleverna ritade då en pil mellan B och C (B → C) och på eget initiativ, utifrån tidigare erfarenheter, skrev de ”7” ovanför pilen.



Slutligen utvecklades ”triangelmodellen” på initiativ av och med stöd av läraren. Det var en modell som eleverna inte hade någon tidigare erfarenhet av.



Triangelmodellen visar i det här fallet att glaset A ”får plats” sju gånger i tillbringare B, samtidigt som tillbringaren B ”får plats” sju gånger i hinken C. Modellen som läraren och eleverna utvecklade visade att istället för att göra mätningen av C direkt med glaset A, gjorde de den indirekta mätningen med tillbringaren B. I triangelmodellen blir det synligt att 7 · 7 även kan utföras genom att enheten A via enheten B kan utgöra ett uttryck för enheten C. Triangelmodellen visualiserar relationen mellan den lilla, den mellanstora och den stora volymen.



Så här såg tavlan ut i slutet av lektionen.

Lärdomar från vårt arbete

Syftet med experimentlektionen var att skapa ett behov av, och synliggöra, multiplikativa strukturer som relationer mellan kvantiteter. Eleverna engagerades i aktiviteten och en teoretisk modell för multiplikation växte fram.

Vi upptäckte en del svårigheter med den design vi valt som vi tror kan bero på valet av kvantiteter. Som bevis för multiplikationen använde eleverna sig av upprepad addition, det vill säga en additiv struktur. Under lektionen framkom att eleverna uttryckte relationen mellan de tre kvantiteterna multiplikativt när de uttryckte att det antal glas som ”fick plats” i tillbringaren och antal tillbringare som ”fick plats” i hinken var desamma (sju stycken). Att antalet var sju i båda fallen kunde ha försvårat för eleverna att urskilja de olika enheterna, vilket kunde ha lett till att eleverna inte urskiljde den multiplikativa strukturen. Om lektionen skulle upprepas är detta någonting att ta hänsyn till, att de två kvantiteterna behöver särskiljas så att det får plats olika många A i B, jämfört med antalet B som får plats i C.

Vi blev även varse vikten av att läraren stöttar och styr elevernas arbete med utmanande frågor. I tillbringaren och i hinken som användes under lektionen fanns graderingar. Dessa graderingar gjorde att eleverna vid ett tillfälle fokuserade på dem istället för att ta reda på hur många glas med vatten som hinken rymde. Läraren fick tydligt klargöra att det var antal glas och inte antal deciliter som skulle fokuseras. Inför en ny lektion kan det därför finnas anledning att använda ograderade behållare.

Dessa två, ovan nämnda omständigheter, påvisar vikten av en välplanerad design, men också att läraren styr verksamheten på ett mycket medvetet sätt i riktning mot det avsedda. Under analysen framkom det att de generella algebraiska symbolerna (a, b och c) kom att få olika funktioner under lektionen. Ibland var de symboler för enheter och ibland var de symboler för kvantiteter. Eleverna uttryckte sig visserligen obehindrat och växlade mellan de två innebörderna och tycktes förstå varandra i kommunikationen. Möjligen är detta trots allt en aspekt som läraren behöver lyfta fram och behandla under lektionen. Hur eleverna uppfattar kvantiteter respektive enheter kan vi utifrån vår lektion inte avgöra. Vi har nu uppslag för fortsatt utforskande för att ytterligare stötta elever till förståelse av multiplikativa strukturer.

LITTERATUR

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science.

Eriksson, H. (2016). *Taluppfattning i heterogena elevgrupper.* Nämnaren 2016:1.

Yeong, J. I., & Dougherty, B. J. (2013). *Linking multiplication models to conceptual understanding in measurement approach*. Conference paper of the 11th the Hawaii International Conference of Education. Honolulu.

Zuckerman, G. (2007). On supporting children’s initiative. *Journal of Russian and East European Psychology*, 45(3), 9–42.