

## Brygga kaffe

– ett matematiskt samtal om uttryck, samband och formler

Författaren återberättar ett långt samtal med elever i årskurs 1. De diskuterar vilket samband som finns mellan rätt mängd vatten och antal mått kaffe för att det ska bli ett gott starkt kaffe – och hur det kan uttryckas matematiskt.

Samband och uttryck är en naturlig del av vår vardag. Kanske är det därför det har fått en central roll i skolalgebran. Att arbeta med obekanta tal är något man gör implicit på lågstadiet, till exempel genom luckor, streck, öppna utsagor och hemliga lådor med frågetecken. Steget till att föra in  $x$  och  $y$  är inte långt. I det här samtalet med elever i årskurs 1 vill jag lyfta fram matematiska begrepp som samband, uttryck och formler utifrån en vardagsnära kontext. Jag börjar samtalet med att prata om en konkret och vardaglig situation – att brygga kaffe.

- Jag: Kan ni hjälpa mig att lösa ett problem?  
Klassen: Jaaa!  
Vincent: Beror på, är det ett vuxenproblem?  
Jag: Ja.  
Ali: Okej då.  
Jag: Jag har ritat en kaffebryggare, ser ni? Har ni sett en sådan någon gång?  
Alla: Jaa.  
Jag: Här fyller jag på vatten [pekar] och här är filterhållaren, där jag fyller på kaffepulver. Nu ska jag fylla dem. Titta! [Ritar att jag fyller vattenbehållaren med tre enheter.]



Som vanligt när vi samtalar, samlas vi i en ring på golvet framför tavlan. Alla som vill får komma till tals och berätta om var, när och hur de har erfårit kaffebrygning. Vi reder ut hur det går till och när ämnet är uttömt kan vi koncentra oss på matematiken i problemet.

- Jag: På morgonen vill jag ha tre koppar kaffe.  
Pelle: Varför tre?  
Jag: Jag behöver extra mycket kaffe på morgonen, för att bli pigg. Jo, jag fyller på med tre koppar vatten i bryggaren först.

Sanna: Jaha, men det måste smaka kaffe också.  
 Jag: Ja! Jag behöver kaffepulver för att det ska smaka kaffe. Någon som kan gissa hur många mått kaffe jag behöver? Hur många kaffemått?  
 Pelle: Lika mycket!  
 Sanna: Lika många!  
 Jag: Håller alla med? Lika många kaffemått som vattenmått?  
 Alla: Jaaa!  
 Vincent: Nä! Inte säkert! Kan var mer, kan vara mindre.  
 Sanna: Fler.  
 Jag: Menar ni att jag behöver fler mått?  
 Vincent: Mm. Eller färre.  
 Moa: Jag tror det är som saft, mer kaffe gör det starkare. Mamma gillar det starkt, hon brukar ta espresso eller vad heter det?  
 Jag: Espresso, ja, det är inte bryggkaffe. Tillbaka till frågan. Nu avslöjar jag svaret: fyra mått. Vad säger ni om det?  
 Vincent: Jag hade rätt!  
 Sanna: Meh!  
 Jag: Sanna, det kommer fler chanser!  
 Pelle: Det är ett mer än vatten! Varför?  
 Sanna: Ja, varför?  
 Jag: Ja, bra fråga! Man brukar säga "ett mått per kopp och så ett för kannan".  
 Vincent: Jaha ... den kannan!

Efter att ha diskuterat den konkreta situationen med klassen, tar jag upp ett annat numeriskt exempel.

Jag: Vem vet hur många kaffemått jag behöver om jag vill ha sju koppar kaffe?  
 Sanna: Jag tänker åtta?  
 Ali: Jag säger sju.  
 Vincent: Jag tror sex. Det var lätt.  
 Vera: Åtta.  
 Fler nickar: Åtta! Åtta!  
 Sanna: Okej då.

Jag väljer ut en elev som har svarat fel, denna gång Ali, för att han ska få en chans att motivera sitt resonemang och upptäcka att det inte håller. Det sätter igång en diskussion elever emellan, där jag inte lägger mig i så mycket.

Jag: Ali, varför sju? Kan du förklara?  
 Ali: Det ska vara ett och samma?  
 Vera: Nej, det var mer kaffe än vatten för att det skulle smaka mer.  
 Sanna: Mm, det var liksom receptet. Det hänger ihop.

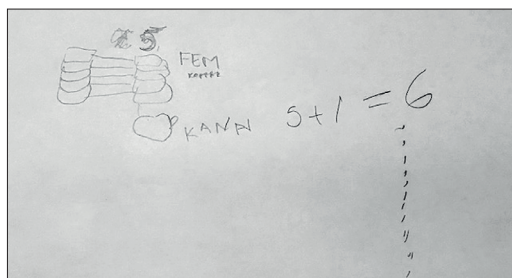
Vera: Vadå hänger ihop?  
 Elias: Hur mycket vatten och kaffe man ska ta, så klart.  
 Vera: Jaha ...  
 Sanna: Det vet man ju inte, det bestämmer fröken!  
 Ali: Nä! Hon bestämmer bara en grej!  
 Vincent: Hur mycket vatten, bestämmer hon.  
 Sanna: Jaha, ja ja, okej då.  
 Jag: Hör ni, jag ser att många är diskussionssugna. Dags att prata i par.

Efter indelningen i par diskuterar eleverna hur sambandet mellan mängden vatten och mängden kaffe ser ut. De får rita, beskriva med ord och siffror, men de måste också komma fram till ett uttryck för hur mängden vatten påverkar mängden kaffepulver. Jag går runt och samlar på mig de olika förslagen:

- ◆ skisser och illustrationer i kombination med ord på +1 dominerar
- ◆ några ritar olika scenarier i tabellform, anger numeriska värden och visar +1 grafiskt
- ◆ två elevpar har skrivit öppna utsagor och varianter av uttrycket  $x + 1$ .

När jag samlar klassen igen sätter jag upp de olika förslagen på tavlan.

Jag: Ali och Moa, berätta om er teckning.  
 Moa: Det är delar, vi tog en här och en där. Ser du strecken? Det är som pilar.



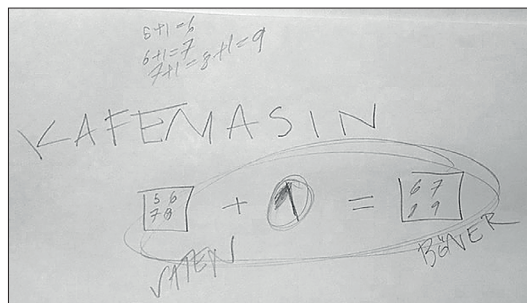
Ali: Du ser en [del] vatten, sen en kaffe, en vatten igen så så så pilar. Men nu lägger vi ihop allt. Här!

Jag: Intressant. Nina och Pelle, berätta om er teckning nu.

Pelle: Man ser vårt hus och liksom hur kaffet doftar för vuxna och ... Siffror!



- Jag: Fint! Vad betyder de?
- Nina: Det är olika brygg. 5, 6, 7, 8, 9 det är vatten och 6, 7, 8, 9, 10. 10 det är kaffe alltså.
- Pelle: Nio vatten och plus ett, alltså ett mer mått hela, hela tiden. Fattar du?
- Sanna: Ja, fast vi skrev samma sak med sån där lucka.
- Jag: Precis, det är fler som har hittat sambandet. Som Vincent och Elias, ni har också hittat sambandet.
- Elias: Ja, fast vi ritade inte utan vi räknade.
- Vincent: Eller vi skrev i alla fall, vi valde mycket, åtta och nio koppar, vi är törstiga nu ...



- Elias: Jag skrev ... vänta lite ... Här!
- Jag: Ja titta, ni skrev  $5+1$ ,  $6+1$  längst upp. Nina, är det tydligt för dig?
- Nina: Jaaa, men vad är det för tärningar?
- Jag: Det är bra att visa vad man har gjort. Ali, vad ritade Vincent och Elias?
- Ali: Det är inte tärningar, det är nog luckor, såna där ...
- Jag: Vad för luckor?
- Ali: Man skriver in receptet där och kan ändra. Just det. Också ett mer. Jag kan det här.
- Jag: Ja! Ett mer. Och visst kan du, du och Vera skrev vatten + 1 = kaffe.
- Vera: Ja!
- Vincent: Vår fröken säger man kan skriva  $x$  och grejer.
- Jag: Ja,  $x$  är en obekant.
- Erika: Jag vet! Och det är därför vi ritade en lucka här, där man fyller i hur mycket kaffe man vill ha är alltid ett mer än hur mycket vatten.
- Vera: Ja, vi hade luckor som i boken.
- Jag: Ja, ni har jobbat med öppna utsagor och obekanta. Kan vi testa att använda  $x$ ?
- Alla: Jaaaa!
- Jag: Och Mira, du har också skrivit lucka + 1. Nu testar vi  $x$  då, eller?
- Mira: Ja, man kan skriva  $x+1$  också, det är bättre.

Med hjälp av elevernas egna formuleringar och förslag utvecklar vi uttrycks-sätt. Som lärare lägger jag till nytt innehåll, till exempel genom att införa korrekta benämningar som *samband* och *öppna utsagor* istället för "luckor". Jag försöker att hjälpa elever att göra kopplingar från konkreta bilder till algebraiska uttryck.

Jag: Då är vi överens om att sambandet är Kaffe = vatten + 1 eller om vi skriver med hjälp av obekanta  $y = x + 1$ . Vad tror ni att jag menar med  $y$ ?

Kaffe = vatten + 1

*Låt stå!*

$$y = x + 1$$

Nina: Kaffe.

Jag: Ali, vad säger du, vad betecknar jag med  $y$ ?

Ali: Kaffe!

Jag: Riktigt. Bra jobbat med teckningarna, allihopa. Nu kommer en utmaning. Min man Jocke har fyllt på med sex kaffemått. Hur mycket vatten ska jag fylla på med?

Vincent: Sju.

Elias: Nej, fem!

Nina: Fem ja! Ett mindre den här gången.

Vincent: Oj, just det! Haha!

Jag: Intressant! Vera, tror du det stämmer?

Vera: Ja, de går åt andra hållet.

Jag: Ja.

Sedan bad jag eleverna att föreställa sig en omvänd situation, där min man har fyllt på med fem mått kaffepulver på morgonen, men inte vatten.

Elias: Har han glömt att hålla på vatten?

Jag: Ja! Tokigt, eller hur? Hur mycket vatten ska jag fylla på? Vad tycker ni?

Elias: Fyra.

Vincent: Ja!

Jag: Härligt! Då vet ni säkert hur mycket vatten sju mått kaffepulver kräver?

Alla: Ja!

Jag: Och åtta? Och nio?

Alla: Ja!

Jag: Och en miljon?

Alla: Jaa.

Vincent: Nej, ingen dricker så mycket, det får inte plats.

Alla: Nää!

Jag: Fast vi kan föreställa oss det?

Sanna: Ja, det är ju en miljon fast ett mindre då ju! Det är 999 999.  
Vincent: Just det.  
Jag: Kan vi skriva ett uttryck för att visa sambandet mellan kaffe och vatten? Som gäller för alla möjliga fall, för fem mått, för 20 mått, för ... Till och med en miljon mått, som vi låtsades nu. Kan ni hjälpa mig?  
Elias: Ja! Tänker liksom tvärtom nu. Vatten är kaffe minus ett. Kaffe är vatten plus ett.  
Ali: Uttrycket är  $y - 1$ .  
Sanna:  $x = y - 1$ ? Jag är förvirrad.  
Nina: Ja! Men det var  $x + 1$ , jag menar det uttrycket, heter det så, innan?  
Jag: Ja, så var det. Hur uttrycker vi ...?  
Vera: Det är åt andra hållet, sa jag ju.  
Vincent: Ja,  $y$  står för kaffe.  
Elias: Ja!  
Jag: Ja,  $y$  betecknar antal kaffemått.  
Sanna: Yepp.  
Jag: Ali och Nina, vad säger ni nu? Har ni ändrat er uppfattning?  
Ali: Ja, nu fattar jag! Man går åt andra hållet (springer fram och ritar en pil).  
Nina: Jag ser också så klart!  
Jag: Eller vet ni vad, det tar så mycket plats på tavlan, vi skriver som matematiker istället, är det ok?  $y$  för kaffe och  $x$  för vatten, är alla med på det?  
Jag: Kan alla skriva alla dessa uttryck på sina planscher?  
Nina: Vi skriver plus ett för vatten, minus ett för kaffe.  
Ali: Vänta, jag fattar ingenting ... Aha, åt andra hållet! Vi skriver ner det.  
Jag: Bra, ni säger samma sak fast på olika sätt! Vi har en formel för hur man brygger kaffe. Vad ska vi med den här formeln till nu då?  
Elias: Formel är magi. En formel ...  
Ali: Om man vet det ena kan man ta reda på det andra.  
Elias: Ja, typ säg fem vatten. Sätt bara in där och så poooh! Formel. Magi.  
Vera: Men åååh! Nu fattar jag.  
Vincent: Snyggt!  
Jag: Tack! Så bra ni är på att tänka tillsammans! Vi sätter in ett värde och får reda på det andra värdet.  
Sanna: Mm, så gör vi.  
Jag: Okej. Ska vi testa en sista nu då? För säkerhets skull.  
Elias: Måste vi?  
Jag: Om jag har 30 koppar vatten ...  
Alla: Woow!

Ali: Kalas.  
Nina: 31 kaffemått. 30 plus ett. Lätt.  
Vera: Klart, vi har ju receptet nu. Bara dubbelkolla lite.  
Elias: Det ser coolt ut! Riktig matte!

## En ynnest

Ett matematisk samtal blir aldrig helt som man har tänkt sig. Som lärare vill jag ständigt förbättra min undervisning och hitta nya sätt att undervisa. Efter att ha ältat detta matematiska samtal i timmar efteråt, insåg jag hur svårt det är att matematiskt tydligt skilja på uttryck och samband i en muntlig framställning, att kunna få fram skillnaden mellan olika variabler.

Genom att låta eleverna uttrycka sin förståelse med egna ord, hjälpte jag dem att närma sig de mer formella uttrycksformerna. Elevernas upptäcksresa mot generaliseringar är spännande att följa och deras generaliseringar kan tas tillvara. Jag som lärare kan hjälpa dem att fundera vidare och upptäcka att  $+1$  inte längre har någon betydelse när man kommer upp i ett större antal koppar – som en miljon. Ett matematiskt samtal kan ofta fortsätta förutsatt att man som lärare vet hur det är möjligt att bygga vidare på elevernas resonemang. Efter varje matematiskt samtal med elever upplever jag att det är en ynnest att få vara med om elevers matematiska aha-upplevelser.



### LITTERATUR

Kilhamn, C., m. fl. (2019). *Matematiska samtal – vägar till elevers lärande*. Liber.

Kilhamn, C. & Olteanu, C. (2014). *Bokstäver som obekanta tal*. Modul Algebra åk 1–3, Del 7. larportalen.skolverket.se