PROBLEM AVDELNINGEN

Substitutionsproblem

Problemen den här gången är alla tänkta att lösas med substitution – en strategi som används för att göra ett komplext uttryckt mer lätthanterligt. Därför är problemen mest riktade till gymnasiet där komplexa uttryck förekommer. I en substitution används välbekanta symboler för att avlasta hjärnan och låta oss använda välkända metoder som addition och subtraktion.

Problemlösning är både ett centralt innehåll och en förmåga i svenska styrdokument. En god ansats vid för problemlösning är Pólyas klassiska schema med fyra steg för problemlösning:

(1) att förstå problemet (2) att göra en plan (hitta en lösningsmetod)
(3) att genomföra planen (4) att se tillbaka (utvärdering)

I steg 2 gäller det att göra upp en plan. Om problemet är komplext kan substitution ibland vara en användbar strategi. Substitution är ett sätt att avlasta den kognitiva ansträngning, och kanske stressen, som många matematiska problem orsakar.

4430 *abcd-problem*
Hur kan vi lösa följande problem?

$$\begin{array}{cccc} \boxed{a} & \times & \boxed{b} & = 21 \\ + & & \times & \\ \boxed{c} & - & \boxed{d} & = 5 \\ = 8 & & = 9 & \end{array}$$

4431 *Många rötter*
Beräkna:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$$

4432 *Ett ekvationssystem*
Lös följande ekvationssystem:

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=189$$
$$a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=180$$

4433 *Ett logaritmproblem*
Lös ekvationen:

$$3\cdot\sqrt{\log(x)}+2\cdot\log\sqrt{x^{-1}}=2$$

4434 *Största talet*
Vilket tal är störst: 99^{100} eller 100^{99} ?

4435 *Lös en integral*

$$\int x\sqrt{(x^2+1)}\,dx$$

Svar och lösningsförslag

4430 *Svar: $a=2{,}1$ $b=10$ $c=5{,}9$ $d=0{,}9$*

$a \cdot b = 21$ [2] $\quad b \cdot d = 9$ [2]

$a + c = 8$ [3] $\quad c - d = 5$ [4]

Subtrahera [3]–[4] och få: $a + d = 3$ [5]

[1] ger $b = \frac{21}{a}$ och [2] ger $b = \frac{9}{d} \implies \frac{21}{a} = \frac{9}{d}$

Vi får att $7d = 3a$ Det kan användas i [5]

$a + d = 3 \Rightarrow 3a + 3d = 9 \implies 7d + 3a = 9$

Vi får att $d = \frac{9}{10}$

4431 *Svar: $t = 3$*

Eftersom uttrycket består av en oändlig serie rottecken kan alla från och med det andra rottecknet substitueras:

$t = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}}$ ger:

$$t = \sqrt{(6 + t)}$$
$$t^2 = 6 + t$$
$$t^2 - t - 6 = 0$$

Omformulera för att utnyttja att $6 = 3 \cdot 2$:

$t^2 - 3t + 2t - 6 = 0 \implies (t-3) \cdot (t+2) = 0$

Ekvationen har lösningarna $t = 3$ och $t = 2$.

Endast $t = 3$ är korrekt eftersom $\sqrt{6 > 2}$.

4432 Svar: Lösningsmängden är $\{a, b\} = \{25, 16\}$

$\sqrt{a} = x \Rightarrow a = x^2 \implies \sqrt{a} \cdot a = x^3$

$\sqrt{b} = y \Rightarrow b = y^2 \implies \sqrt{b} \cdot b = y^3$

$x^3 + y^3 = 189 \implies (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 189$

$x^2 \cdot y + y^2 \cdot x = 180 \implies (xy)(x+y) = 180$

$\frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(xy)(x+y)} = \frac{189}{180} \implies \frac{(x^2 - xy + y^2)}{(xy)} = \frac{21}{20}$

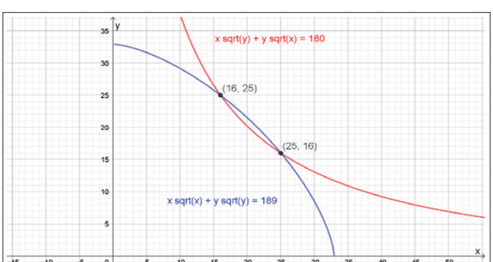
$\implies 20x^2 - 41xy + 20y^2 = 0$

dividera med y^2: $20\frac{x^2}{y^2} - 41\frac{x}{y} + 20 = 0$

substituera: $t = \frac{x}{y}$ och lös: $20t^2 - 41t + 20 = 0$

faktorisera: $(4t - 5)(5t - 4) = 0$

$t = \frac{4}{5}$ eller $t = \frac{5}{4}$ så $x = 5$; $y = 4$ eller $x = 4$; $y = 5$



$a = x^2 \implies a = 25$ eller $a = 16$

$b = y^2 \implies b = 16$ eller $b = 25$

4433 Svar: $x = 10$ eller $x = 10^4$

Använd två av alogaritm-lagarna och substituera. först logarimlagen: $\log(x/y) = \log x - \log y$, sedan logarimlagen: $\log x^a = a \cdot \log x$

$$3 \cdot \sqrt{\log(x)} + 2 \cdot \log\sqrt{x^{-1}} = 2$$
$$3 \cdot \sqrt{\log(x)} + \log(\sqrt{x^{-1}})^2 = 2$$
$$3 \cdot \sqrt{\log(x)} + \log\frac{1}{x} = 2$$
$$3 \cdot \log(x)^{\frac{1}{2}} - \log(x) - 2 = 0$$

substituera: $\quad y = \log(x)^{1/2}$

$\quad\quad y^2 = \log(x)$

$3 \cdot y - y^2 - 2 = 0 \implies y^2 - 3y + 2 = 0$

Det ger att $y = 1$ och $y = 2$ är lösningar.

$y = \log(x)^{1/2} = 1$ ger att $x = 10$

$y = \log(x)^{1/2} = 2$ ger att $x = 10^4$

4434 Svar: $99^{100} > 100^{99}$

$a = 99^{100}, b = 100^{99}$

$\ln(a) = \ln(99^{100}) = 100 \cdot \ln(99)$

$\ln(b) = \ln(100^{99}) = 99 \cdot \ln(100)$

Betrakta $y = \frac{\ln(x)}{x}$ och dess derivata:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0$$

Vi får $1 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 1$ och sålunda ett maximum för $x = e \implies y = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

För $x > e$ är funktionen $y = \frac{\ln(x)}{x}$ avtagande.

Uppenbart är $100 > 99 > e$

Så $\frac{\ln(100)}{100} < \frac{\ln(100)}{100} \Leftrightarrow 99 \cdot \ln(100) < 100 \cdot \ln(99)$

Sålunda är $99^{100} > 100^{99}$

Generellt har vi att om $x \geq e$ så är $x^{x+1} > (x+1)^x$

4435 Svar: $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$

Substituera $t = x^2 + 1$

$dt = 2xdx \quad dx = \frac{dt}{2x}$

$$\int x\sqrt{(x^2 + 1)}\, dx = \int x \cdot t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Thomas Lingefjärd