

Begreppet area i skolmatematiken

Fördjupat kunnande och färdighetsträning med aktiviteter i Geogebra

Författarna visar hur begreppet area kan komma till uttryck under elevers skolgång och hur Geogebra kan användas för att befästa elevernas kunnande. De inleder med ett par exempel från låg- och mellanstadiet och fördjupar sedan två aktiviteter för högstadiet respektive gymnasiet. Geogebra-adresser till aktiviteterna finns samlade i slutet av artikeln.

Vi vill med denna artikel beskriva hur begreppet area används i skolmatematiken och hur begreppet byter mening när elever läser allt mer matematik under sin studietid. Vår mångåriga erfarenhet av matematikundervisning är att elever kan ha svårt att förstå vad begreppet area står för. Elever kan exempelvis ha problem med att hålla isär begreppen area och omkrets.

Area definieras som en storhet som beskriver utsträckningen av en yta i planet. Men en inte helt ovanlig missuppfattning bland elever är att de uppfattar att exempelvis en villatomts area är densamma som längden på villatomtens omkrets. Elever kan lätt koppla begreppet omkrets (= längd) till sina egna erfarenheter, medan det tvådimensionella begreppet area är betydligt mer komplext.

Vi erbjuder i artikeln förslag på undervisningsmaterial i Geogebra som kan ge elever möjlighet att bättre förstå olika aspekter av area. Inledningsvis ger vi förslag på aktiviteter för elevers färdighetsträning efter att de fått möta areabegreppet med hjälp av konkreta aktiviteter och laborativt material. Därefter koncentrerar vi oss på en aktivitet som kan vara lämplig för högstadiet och slutligen kommer vi in på area och integraler för gymnasiet.

Lågstadiet

En avstämning mot vad elever kan om area kan finnas i det nationella provet i årskurs 3. Ett exempel på en sådan uppgift beskrivs i figur 1. Det handlar om att jämföra mattbitar och visar om elever förstår vad storheten area innebär.

För att arbeta med ännu icke formella areaenheter kan elever använda en Geogebra applet som den i figur 2. Där är det tänkt att eleven först ser att figur D är uppmätt med 7 måttenheter för area. Därefter kan eleven mäta hur många små kvadrater som går in i övriga figurer genom att flytta de färgade kvadraterna på skärmen och lägga dem i figur A, B, C eller E.

Novas sätt

Trojs sätt

Nova och Troj vill ha en matta som de ska lägga på golvet i kojans. De har fått 3 mattbitar. De provar på olika sätt.

a) Vilken mening stämmer med bilderna? Sätt ett kryss.

Novas matta tar störst plats på golvet, alltså har störst area.

☐

Trojs matta tar störst plats, alltså har störst area.

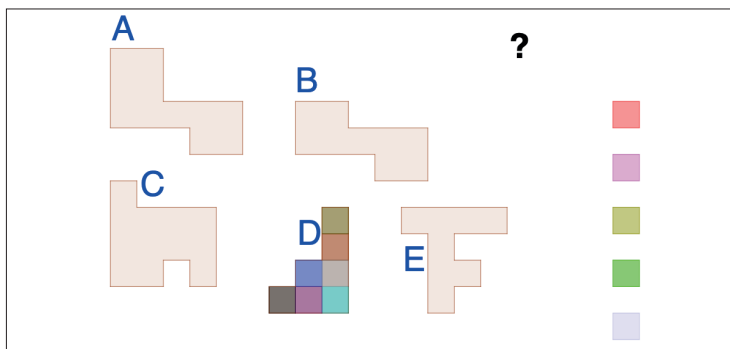
☐

Båda mattorna tar lika stor plats, alltså har lika stor area.

☐

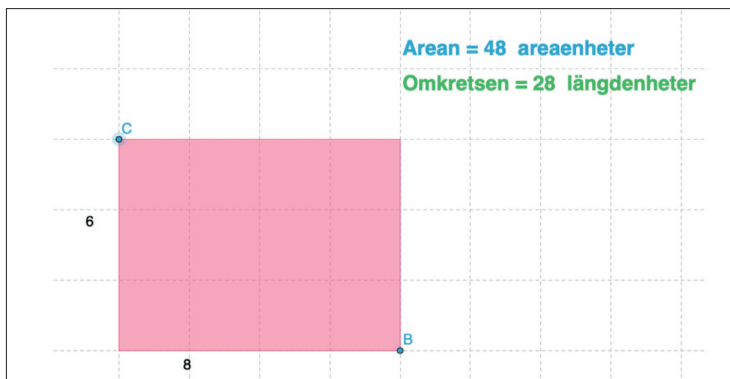
b) Förklara hur du vet det.

Figur 1. Area presenterad i nationellt prov för årskurs 3.



Figur 2: Begreppet areaenhet visad i en Geogebra applet.

Undervisning och läroböcker lägger grunden till vad area och omkrets betyder redan i årskurs 2–3 och efter hand införs enheter, mått och mätning och eleverna får reflektera över samband mellan omkrets och area. Figur 3 visar en aktivitet där area och omkrets på en rektangel kan undersökas.



Figur 3: Area och omkrets visad i en Geogebra applet.

Mellanstadiet

Under årskurserna 4–6 lär sig elever hantera uppgifter av följande typ:

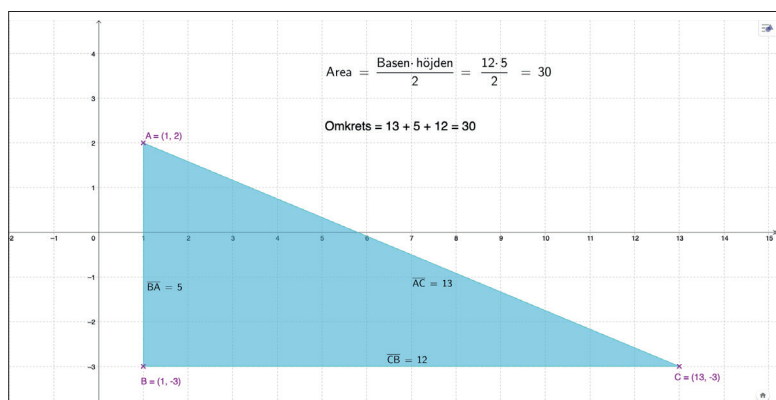
Eleverna får varsin lika stor kvadrat i papper att använda till bilden av sin drake.

Hur stor area har kvadraten?

Skriv bara svar: _____ cm²

Figur 4: Exempel från Bedömningsexempel NP årskurs 6 2013.

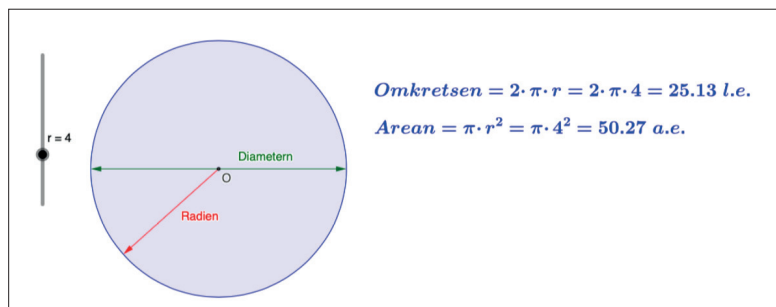
Även en triangel har en area och en omkrets. För att laborera med area och omkrets av en triangel använder vi Geogebra som verktyg.



Figur 5: Area och omkrets av en triangel.

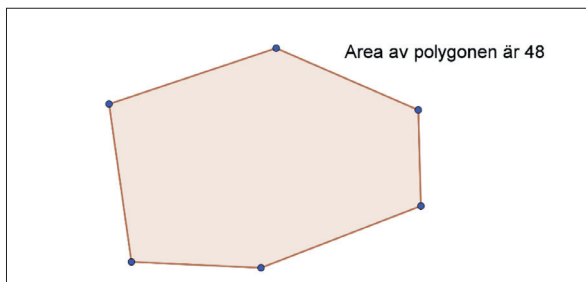
Högstadiet

Med Geogebra går det att visa det mycket viktiga sambandet mellan arean av en cirkel och dess radie.



Figur 6: Area och omkrets av en cirkel.

I årskurserna 7–9 tillkommer många nya geometriska figurer med areor som kan och bör beräknas, exempelvis parallelogram, romb, parallelltrapets, triangel, cirkel och cirkelsektor (med båglängd). Ett annat namn för månghörningar är polygoner. Enligt definitionen är en polygon en figur som består av ett antal sträckor som hänger ihop i sina ändpunkter. Med Geogebra går det att beräkna arean av en polygon genom att använda verktyget polygon. Figuren blir då dynamisk, det vill säga arean räknas om när man omformar figuren genom att flytta punkterna.

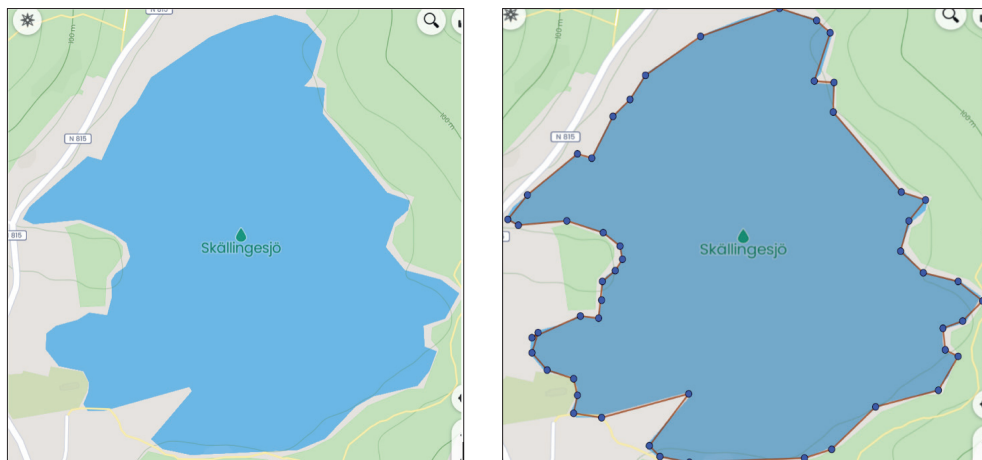


Figur 7: Area av en polygon.

Dessutom expanderas areaskala till volymskala och volymberäkningar görs på rätblock, prisma, cylinder (som har både mantelarea och volym), pyramid, kon (mantelarea och volym), klot (volym och mantelarea).

En sjös area

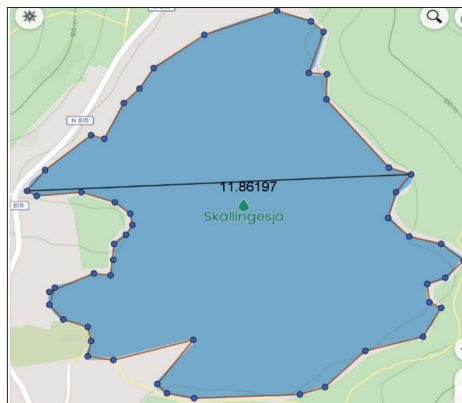
Genom att använda polygonverktyget i Geogebra går det att mäta arean av exempelvis sjöar eller andra ytor i vår närhet. Låt oss mäta arean av Skällingesjö i Varbergs kommun. Först får vi skaffa en bild av sjön.



Figur 8 och 9: Skällingesjö i Varbergs kommun och början till en modell av den.

Genom att sätta ut punkter runt om Skällingesjö så går det att definiera en polygon som det är möjligt att mäta arean av. Punkterna bör sättas ganska tätt så att det inte blir för stor avvikelse mellan sjön och polygonen.

För att kunna mäta arean av sjön behöver vi en referens, en skala. Vi måste veta något om hur lång sjön egentligen är. Det går lätt att uppskatta med Google Maps som ger att bredden av sjön mätt som nedan är 627 meter. Vi mäter vad Geogebra ger för mått på denna sträcka tvärs över sjön och vi får måttet 11,862 längdenheter. Vi får en skala för Geogebbras mätverktyg: verkligheten = 1: 52,858.



Figur 10: Vi skaffar oss en skala för vår modell av Skällingsjö i Varbergs kommun.

Arean av polygonen för Skällingsjö uppskattas till 106,25149. För att få arean ska nu detta värde multipliceras med areaskalan som är $(\text{längdskalan})^2$, det vill säga $52,858 \cdot 52,858$. Vi får arean $296\,863,28\text{ m}^2$.

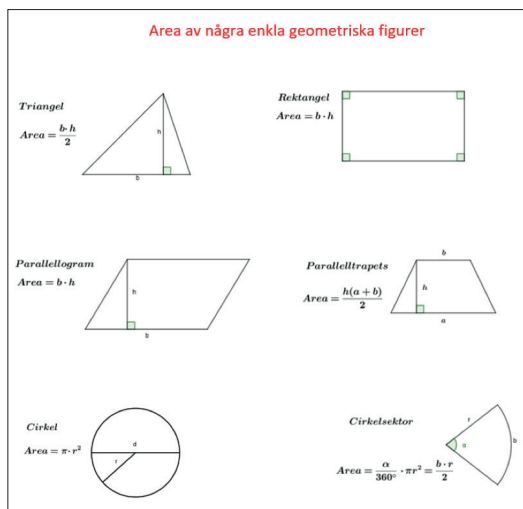
Vi har också via kontakter med stadsbyggnadskontoret i Varberg fått information att det går att beräkna arean av Skällingsjö med programmet QGIS, ett öppet och gratis GIS-program som används inom kommunen. Underlaget, alltså ytan för sjön, är hämtat från Lantmäteriet (en delmängd av Lantmäteriets produkt fastighetskartan). Areaberäkningen är en inbyggd funktion i programmet och den beräknade arean är $304\,862\text{ m}^2$.



Figur 11: Uppskattning via programmet QGIS ger arean $304\,862\text{ m}^2$.

Gymnasiet

Begreppet area och areaberäkningar tas upp även i gymnasiets kurser. I Mala och Malb nämns ungefär samma geometriska figurer som i grundskolans senare år.

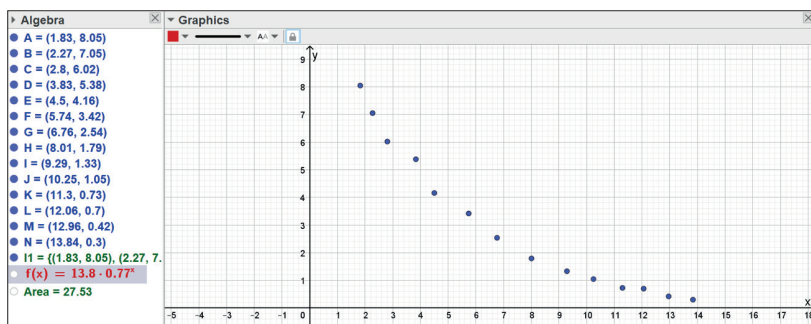


Figur 12: Formler för att beräkna areor av olika geometriska figurer.

Area under en kurva

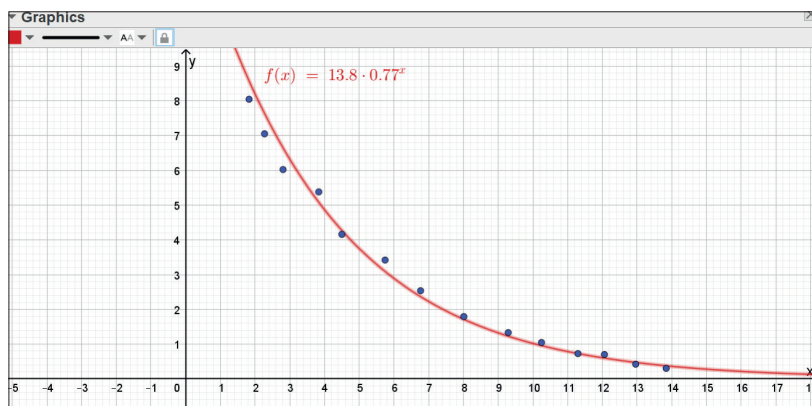
I Ma 3 möter eleverna areaberäkningar under en kurva och även arean som begränsas mellan två kurvor. Vi vill med ett exempel visa hur är det möjligt att beräkna arean under en kurva och använder Geogebra som ett digitalt hjälpmedel.

Vi skapar först en mängd av punkter i Geogebra. I förväg har vi bestämt att dessa punkter kommer att beskriva en avtagande exponentiell funktion. Genom att markera alla punkter och sedan använda kommandot **Skapa lista** skapar vi **lista1** som visas i algebrafönstret.



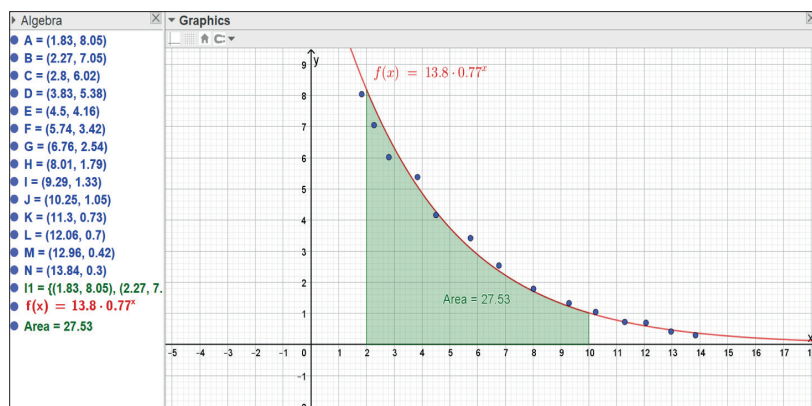
Figur 13: Punktmängd i Geogebra's koordinatsystem.

Sedan använder vi regression genom att i inmatningsfältet skriva **RegressionExp(11)** och Geogebra levererar den avtagande exponentiella funktion som passar bäst till punkterna.



Figur 14: Punktmängd och regressionslinje i Geogebra.

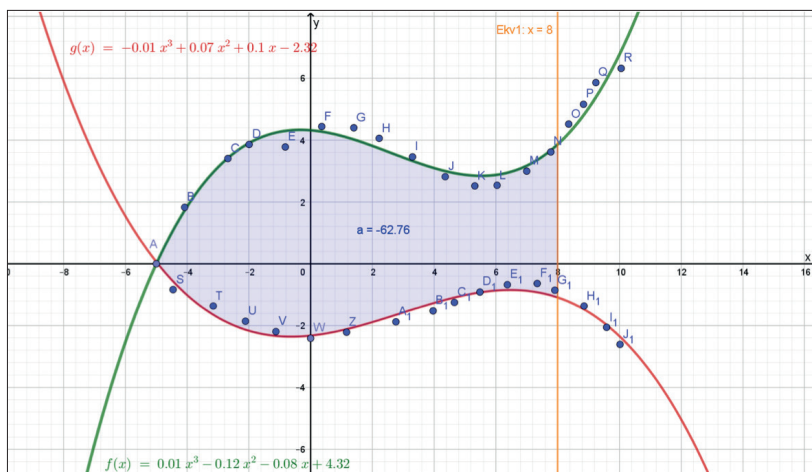
Vill vi beräkna arean av integralen under kurvan så skriver vi **Integral(f,2,10)** i inmatningsfältet och Geogebra markerar området under kurvan i intervallet mellan $x = 2$ och $x = 10$. Geogebra beräknar även arean av detta område som är 27,53 areaenheter.



Figur 15: Punktmängd, regressionslinje och area för integral i Geogebra.

Area mellan funktioner

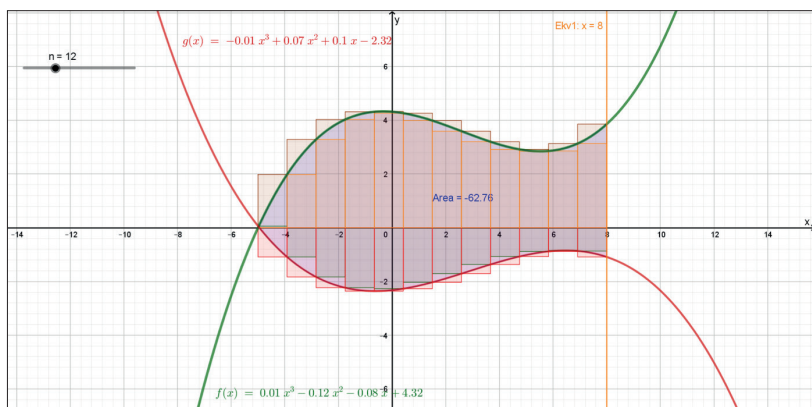
Nu vill vi utföra en areaberäkning mellan två funktioner med hjälp av Geogebra. Först skapar vi två funktioner på samma sätt som beskrivits ovan. Vi bestämmer att dessa två polynomfunktioner är av grad tre. Denna gång använder vi kommandot **RegressionPoly(<Lista med punkter><Polynomgrad>)**. Tredjegradsfunktion möter en del elever redan i Ma2 och de är frekventa i Ma3. Vi ska beräkna arean av det skuggade området som begränsas av dessa två funktioner och linjerna $x = x(A)$, (där punkten A är skärningspunkt mellan dessa två funktioner) och $x = 8$.



Figur 16: Punktmängd, regressionslinjer och arean emellan i Geogebra.

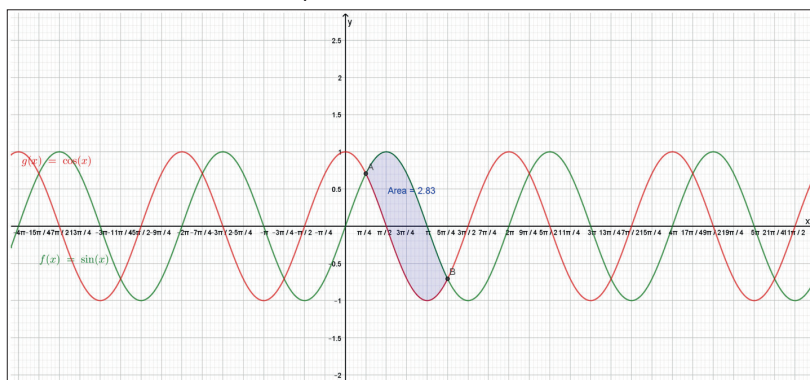
Ett sätt att förklara hur vi beräknar arean av det skuggade området är att dela in det i rektanglar. Vi gör även det i Geogebra. Först skapar vi en heltalsglidare som vi kallar n med minsta värde 1 och största värde 40. Sedan skriver vi i inmatningsfältet **Översumma**($g, x(A), 8, n$) och därefter **Undersumma**($g, x(A), 8, n$) och Geogebra delar det skuggade området under funktionen g begränsat med x -axeln i delar, först i n delar överfunktionen g och sedan i n delar underfunktionen g . Till vänster i algebrafönstret kan vi avläsa värdena på **Översumma** och **Undersumma**.

På samma sätt skriver vi **Översumma**($f, x(A), 8, n$) och därefter **Undersumma**($f, x(A), 8, n$). I algebrafönstret får vi ytterligare två värden. Slutligen kan vi beräkna arean av det skuggade området som medelvärde av **Översumman** och **Undersumman**. Den exakta arean av det skuggade området kan vi beräkna med kommandot **IntegralMellan**(<Funktion><Funktion><Från><Till>). Vi skriver i inmatningsfältet **IntegralMellan**($g, f, x(A), 8$) och sedan jämför vi resultatet för olika värden på n . Se figur 17 för $n = 12$. Ju fler rektanglar vi delar det skuggade området i, desto närmare värde på arean får vi.



Figur 17: Området mellan två funktioner indelat i rektanglar med Geogebra.

Värdet av integralen kan vara positivt eller negativt. Arian uttrycks med ett positivt tal, eftersom area är storleken av ett område. I Ma4 fortsätter elever att göra areaberäkningar under och mellan trigonometriska funktioner. Till exempel beräknar de arean mellan funktionen $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = \cos(x)$ i intervallet mellan $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.



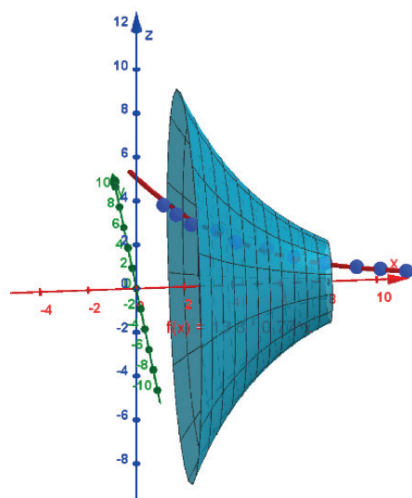
Figur 18: Area mellan två trigonometriska funktioner.

Elever som läser Ma 4 eller Ma 5 kan även beräkna area av rotationskroppar. Vi beskrev hur vi skapar rotationskroppar i Geogebra i Nämnaren 2016:1 och 2020:4. Genom att till exempel rotera funktionen $f(x) = 13,8 \cdot 0,77^x$ från figur 14 kring x -axeln i intervallet $2 \leq x \leq 10$, får vi en rotationskropp. Den har en innesluten volym och en mantelarea.

Volymen för en rotationskropp ges av $\int_a^b \pi \cdot f(x)^2$. För att beräkna mantelarea för rotationskroppen ovan använder vi formeln:

$$A = 2\pi \int_2^{10} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

För att förstå dessa två formler måste elever förstå formler för arean av en cirkel och Pythagoras sats. På så sätt kan eleverna förståelse av area fullbordas.



Figur 19: Funktion $f(x) = 13,8 \cdot 0,77^x$ roterad kring x -axeln.

LÄNKAR

Arbete med icke formella areaenheter:

<https://www.geogebra.org/classic/meckpj98>

Samband mellan omkrets och area:

<https://www.geogebra.org/classic/za8dpckm>

En triangels omkrets och area:

<https://www.geogebra.org/m/uwrp8dhm>

Sambandet mellan en cirkels area och radie:

<https://www.geogebra.org/m/t3tnxx5t>

Area av en polygon:

<https://www.geogebra.org/m/kzqqmbu2>

Området mellan två funktioner:

<https://www.geogebra.org/m/a5t7d5sc>