M. Däcker, F. Hollsten, E. Kaminski & L. Rådvall

Undervisningen har betydelse

– *elevers kunskaper om algebraiska uttryck*

Inom ramen för Stockholmsprojektet har fyra lärare på högstadiet och gymnasiet undersökt hur elever hanterar algebraiska uttryck och hur dessa färdigheter utvecklas av undervisningen.

De senaste årens resultat från internationella kunskapsundersökningar i matematik, har gång på gång visat att svenska elevers kunskaper har försämrats och att algebra är ett av områdena där svenska elevers prestationer är svaga (TIMSS, 1995; TIMSS, 2007; TIMSS, 2008; PISA, 2009; Bentley, 2008; Persson, 2010). Analysen av nämnda undersökningar visar att de svenska elevernas försämrade resultat bland annat beror på det dominerande tysta räknandet i läroböcker. Procedurinriktad undervisning, där elever lär sig en mängd isolerade detaljer utan inbördes sammanhang, gynnas på bekostnad av begreppsförståelse.

Ökad användning av hjälpmedel, i första hand datorprogram och miniräknare, som ett sätt att lösa matematiksvårigheterna har också visat sig vara verkningslös. För elever har detta blivit ännu en abstraktionsgrad att hålla reda på (Persson, 2010). Våra egna erfarenheter och det vi uppfattat från kollegor på gymnasieskolor understryker denna uppfattning.

Bakgrund till vår undersökning

Vi som skriver denna artikel är yrkesverksamma lärare på grundskolans högstadium och i gymnasieskolan. I vår undervisning märkte vi att elevers bristande kunskaper i hanteringen av algebraiska uttryck utgjorde hinder för andra matematikområden. Våra samstämmiga erfarenheter gjorde att vi bestämde oss för att undersöka de vanligast förekommande felen vid hantering av algebriska uttryck. Även inom den matematikdidaktiska forskningen har fenomenet uppmärksammats under senare år, exempelvis Bentley (2008) och Persson (2010).

Vår huvudfråga är *Hur hanterar elever algebraiska uttryck?* Närmare bestämt intresserar vi oss för hanteringen av dessa uttryck och om elevers medvetande om detta. Syftet med vår undersökning är att synliggöra elevers kunskaper i samband med omformning, i synnerhet förenkling, av dessa algebraiska uttryck. Vi vill också undersöka hur elever i grundskolans årskurs 9 och gymnasiets Matematik B hanterar enkla algebraiska uttryck. Vi vill även se om det är begrepp eller procedurer, eller båda, som är de största fallgroparna för elever. Vår arbetshypotes var att svårigheter på högstadiet vid hantering av algebriska uttryck följer med eleverna upp i gymnasiet. Vår förhoppning är att resultatet av vårt arbete kommer att bidra till en förbättrad undervisning i algebra.

Kritiska moment

Utifrån våra undervisningserfarenheter sammanställde vi de mest kritiska momenten vid hantering av algebraiska uttryck, exempelvis multiplikation in i parentes, parentesens betydelse samt multiplikation av bråk och heltal. Utifrån sammanställningen utarbetades lämpliga tester för att fånga upp just dessa kritiska moment. Testerna genomfördes under vårterminen 2011 i fem högstadieklasser i slutet av årskurs 9 och i tre NV-klasser i slutet av årskurs 1, när eleverna hade läst hela Matematik A och större del av Matematik B. Sammanlagt testades 91 högstadieelever och 69 gymnasieelever.

En av högstadieklasserna (27 elever) undervisades med fokus på de kritiska momenten i hantering av algebraiska uttryck. Klassen undervisades av en av projektdeltagarna, Ewa Kaminski. I fortsättningen kallar vi Ewas grupp för *Algebragruppen*. I Algebragruppens undervisning avgränsades lärandeobjekten tydligt. Centrala begrepp diskuterades ofta. De kritiska momenten i hantering av algebraiska uttryck lyftes regelbundet fram. Läromedlet användes i huvudsak som en samling av uppgifter. Läraren tydliggjorde strukturen i hantering av de algebraiska uttrycken och stor vikt lades på automatisering av dessa strukturer. De uppgifter som användes valdes ur en större uppgiftsbank med fokus på fyra områden: kunskaper om *bråkräkning*, begreppet *termer av samma sort*, *prioriteringsregeln* och så kallade *dolda tecken* samt hur dessa påverkar hanteringen av algebraiska uttryck. Med dolda tecken menar vi här symboler som vanligtvis inte skrivs ut, till exempel talet 1 framför en variabel i ett algebraiskt uttryck, talet 1 som faktor i en multiplikation eller talet 1 som exponent i samband med potensräkning. Parenteser i bråkuttryckens täljare och nämnare är andra exempel på sådana dolda tecken.

Resultat av testet

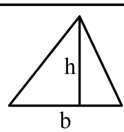
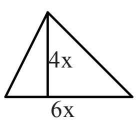
Tabellen på nästa sida visar lösningsfrekvensen uttryckt i procent för Algebragruppen, Högstadiegruppen och Gymnasiegruppen. Färgerna visar gruppernas inbördes placering per fråga, rött för lägst lösningsfrekvens och grönt för högst lösningsfrekvens.

Bråkräkning

Av resultattabellen framgår att på både högstadiet och gymnasiet är lösningsfrekvensen låg på uppgifterna 10, 12 och 15. Gemensamt för dessa tre uppgifter är att de behandlar bråkräkning. Svårigheterna med bråkräkning verkar kvarstå på gymnasiet, trots att eleverna har läst ytterligare två matematikkurser.

Lösningsfrekvensen på uppgifterna 3 och 5 är högre, trots att dessa också handlar om bråkräkning. Det horisontella bråkstrecket i dessa uppgifter kan tänkas underlätta för eleverna att först utföra separata beräkningar i täljare respektive nämnare var för sig. Den låga lösningsfrekvensen i ovanstående uppgifter kan bero på att eleverna inte förstått innebörden av bråkbegreppet samt inte tillräckligt automatiserat bråkräkning.

En närmare beskrivning av algebragruppens undervisning kommer att presenteras i en uppföljande artikel (red. anm.)

Nr	Uppgift		Algebra-gruppen	Högstadie-gruppen	Gymnasie-gruppen
1	Multiplicera	$5(3x-4)$	96	66	88
2	Beräkna	-5^2	44	63	45
3	Förenkla så långt som möjligt	$\frac{9+12}{3+4}$	89	72	75
4	Förenkla uttrycket	$12-(5+3x)$	67	50	55
5	Beräkna och svara i bråkform	$\frac{8+1}{2}$	89	84	83
6	Multiplicera	$2x(4x+6)$	85	20	81
7	Beräkna	$(-3)^2$	89	25	81
8	Beräkna summan	$6a^2+a^2$	74	33	77
9	Förenkla uttrycket	$17-2(4x^2+6)$	59	22	52
10	Beräkna och svara i bråkform	$3\cdot\frac{2}{7}$	93	31	49
11	Beräkna	$\sqrt{9+16}$	74	70	86
12	Beräkna	$4\cdot\frac{x}{5}$	89	28	51
13	Förenkla	$\frac{(x-99)+(x-99)+(x-99)+(x-99)}{(x-99)+(x-99)}$	22	15	19
14	Förenkla så långt som möjligt	$\frac{6x+2x}{6}$	52	41	41
15	En triangels area kan beräknas enligt formeln.  $A=\frac{b\cdot h}{2}$  Ange i **enklaste form** arean av triangeln intill.		48	17	39

Tabell 1: De tre gruppernas resultat

Termer av samma sort

Uppgifterna 8 och 13 visar både i årskurs 9 och på gymnasiet stora brister i begreppet termer av samma sort. Det märks dock en förbättring för gymnasiegruppen på uppgift 8 som sannolikt beror på att eleverna hunnit arbeta mer med andragradstermer.

Möjligen känner eleverna bättre igen de termer av samma sort som de arbetat med, till exempel i uppgifter som behandlar uttrycken $3x + 2x$ och $3x^2 + 2x^2$, men har svårt för andra typer av dessa termer. Vi har nämligen sett att elever i Algebragruppen som arbetat med uppgifter av typen $3xy + 2xy$, $3(x + y) + 2(x + y)$ och $4xy + 3x - xy$ hade lättare att befästa innebörden av begreppet termer av samma sort.

Uppgift	Exempel på elevers missuppfattningar	Var finns bristerna?
$5(3x-4)$	$53\ x-4$ $15\ x-4$	$5\cdot(3x-4)$ Distributiva lagen Dolt multiplikationstecken
$12-(5+3x)$	$12-5+3x$	$12-1\cdot(5+3x)$ (-1) multipliceras in i parentesen eller hela parentesen ska subtraheras
$17-2(4x^2+6)$	$17-8x^2+12$	(-2) multipliceras in
-5^2	25 eller -10	Potensbegreppet Exponentens funktion
$(-3)^2$	-9 eller -6	Potensbegreppet Tyda parentesens betydelse Exponentens funktion
$\frac{(x-99)+(x-99)}{(x-99)}$	$x-99$ Räknar genom att addera parenteserna och lägga ihop termer av samma sort.	Prioriteringsregeln Förkorta bråk Begreppet termer av samma sort
$6a^2+a^2$	$7a^4$ $6a^4$	Begreppet termer av samma sort Prioriteringsregeln $6a^2+1a^2$
$4\cdot\frac{x}{5}$	$\frac{4x}{20}$	Bråkbegreppet Bråkräkning $\frac{4}{1}\cdot\frac{x}{5}$
$\frac{6x\cdot 4x}{2}$	$6x^2$ eller $12x$	Förkorta bråk Potensbegreppet

Tabell 2: De vanligaste felen vid hantering av algebraiska uttryck.

Förenkling

Resultaten visar låg lösningsfrekvens på uppgifterna 4, 6 och 9 som behandlar förenkling av uttryck. Det framgår tydligt att procedurerna vid förenkling av algebraiska uttryck ställer till stora svårigheter för högstadieeleverna. Även på gymnasiet klarar bara hälften av eleverna av att förenkla uttrycken $12-(5+3x)$ och $17-2(4x^2+6)$. I uppgift 6 märks en klar förbättring av resultaten till gymnasiet, vilket kan förklaras med att Matematik B tar upp omformning av andragradsuttryck.

Parenteser

Lösningsfrekvensen på uppgifterna 2 och 7 visar bristande kunskaper i parentesens betydelse. Vårt intryck är att parenteser behandlas ytligt i de läromedel vi har använt, Matte Direkt, 2003; Matte till 1000, 1995; Matematik 3000 AB, 2003; Exponent A, 2002, och kräver mer uppmärksamhet i undervisningen.

Dolda tecken

I uppgifterna 2, 4 och 8 förekommer dolda tecken.

$$-5^2 = -1 \cdot 5^2$$
$$12 - (5 + 3x) = 12 - 1 \cdot (5 + 3x)$$
$$6a^2 + a^2 = 6 \cdot a^2 + 1 \cdot a^2$$

Vi menar att dolda tecken inte uppmärksammas tillräckligt i undervisningen.

Följder för undervisningen

De viktigaste resultaten visar att det huvudsakligen finns tre eftersatta områden: bråkräkning, begreppet termer av samma sort och förenkling av algebraiska uttryck. Följande tabell sammanfattar elevernas vanligaste missuppfattningar, tillsammans med våra kommentarer om sannolika orsaker.

Resultaten visar att undervisning med fokus på kritiska moment i algebra leder till högre lösningsfrekvens på de flesta uppgifter i vårt test. På var och en av de 15 uppgifterna sammanställde vi lösningsfrekvenserna för Algebragruppen, Högstadiegruppen och Gymnasiegruppen. En jämförelse visade att 12 av uppgifterna, d v s 80 %, hade högst lösningsfrekvens i Algebragruppen. Så visst har undervisningens utformning betydelse.

Hur ser då undervisningen ut? Enligt analyserna av TIMSS (2007) och TIMSS Advanced (2008) dominerar det tysta och mekaniska räknandet i läroböcker i svenska skolor. Som en del av en individualiserad undervisning arbetar eleverna under samma lektion med olika uppgifter från boken.

Man kan fråga sig vad det är som gör att progressionen uteblir i många av fallen och varför eleverna inte blir bättre trots att de läst ytterligare två matematikkurser på gymnasiet. Kan det vara så att lärare på gymnasiet inte är medvetna om elevernas förkunskaper eller är det brist på tid som är hinder för att hinna reparera bristande baskunskaper i algebra?

Algebragruppen, som har undervisats med hänsyn tagen till elevers vanligaste missuppfattningar, presterar bättre än de andra grupperna på fyra femtedelar av uppgifterna. Medveten undervisning ger resultat.

LITTERATUR

Ericsson, S. & Svanberg, C. (2005). *Matematikkunskapernas försämring i grundskolan*, examensarbete. Luleå: Luleå tekniska universitet. Tillgängligt 2012-03-26 på epubl.ltu.se/1652-5299/2005/054/LTU-LAR-EX-05054-SE.pdf

Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver!* Doktorsavhandling. Luleå: Luleå tekniska universitet. Tillgängligt 2012-03-26 på pure.ltu.se/portal/files/3593738/Per-Eskil_Persson_Doc_2010.pdf

Wahlström & Widstrand (1991). *Matematiklexikon*. Västervik.

Bentley, P-O. (2008). Mathematics teachers and their conceptual models – a new field of research. *Göteborg studies in educational sciences 265*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.