Roger Antonsen

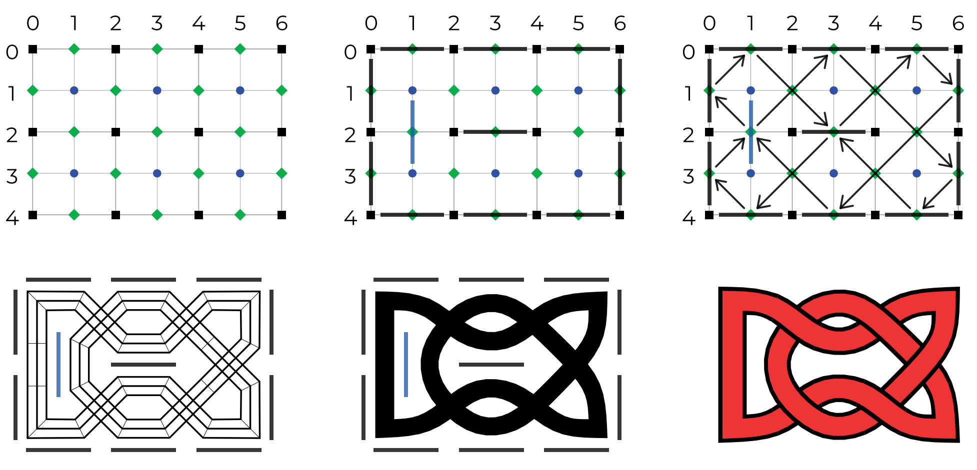
Keltiska knutar

Keltiska knutar är en mängd olika knutar och stiliserade grafiska framställningar av knutar som bland annat används för dekoration. Här beskriver författaren konstruktion och kategorisering och han visar beräkningar för hur designen av keltiska knutar kan göras.

Keltiska knutar och liknande strukturer har studerats flitigt i den matematiska litteraturen, ofta med fokus på topologi, knutteori och symmetrier. Det finns många fascinerande och lärorika matematiska aspekter av keltiska knutdesigner. *Hur används rektangulära rutnät för att konstruera keltiska mönster? Hur många mönster finns det av en specifik typ? Hur är keltiska mönster relaterade till varandra? Vilka är egenskaperna som får en knut att se keltisk ut?*

Att konstruera keltiska knutmönster

Keltiska knutdesigner är ofta rutnätsbaserade. För att konstruera en $m \times n$ keltisk design använder vi ett tvådimensionellt rutnät med en dubbel uppsättning av punkter $\langle c, r\rangle$, där $0 \leq c \leq 2m$ och $0 \leq r \leq 2n$. Detta rutnät innehåller tre delmängder: Huvudrutnätet består av punkterna $\langle c, r\rangle$ där c och r båda är jämna (visas som svarta rutor). Det andra rutnätet består av punkterna $\langle c, r\rangle$ där c och r båda är udda (blå cirklar). De återstående punkterna, där $(c+r)$ är udda, är de som ligger till grund för själva den keltiska designen (visas som gröna diamanter). Vi kallar dessa *svängpunkter* (pivot-punkter), eftersom det är här vi kan infoga *stopp*, som bryter flödet mellan angränsande rutnätspunkter. Valet av vertikala, horisontella eller frånvarande stopp vid dessa svängpunkter bestämmer helt en unik keltisk design, som illustreras i följande sekvens av en 3×2-design:



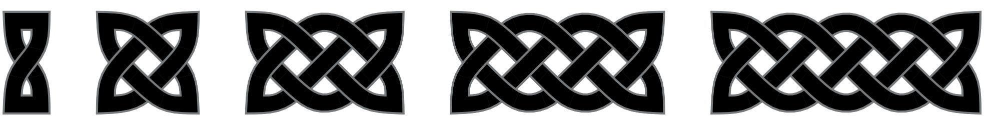
Som en biljardboll

För att konstruera en design, föreställ dig att du börjar vid en av svängpunkterna och skjuter en biljardboll i 45 graders vinkel mot designens mitt. Närhelst du stöter på ett stopp studsar du som en biljardboll skulle göra, eller som en ljusstråle skulle reflekteras i en spegel. Du fortsätter tills du är åter i utgångsläget och har fått en sluten bana, ett så kallat *band*. På grund av denna studsande konstruktion kallas sådana kurvor också spegelkurvor. Finns det svängpunkter kvar som du inte rört vid börjar du om på ett annat ställe tills du täckt in hela rutnätet. När alla svängpunkter är täckta har du en färdig keltisk design som består av ett eller flera band. Möjligen kan du sedan räta ut, släta till eller stilisera din kurva för att göra din design mer estetisk.

Observera att det finns två typer av stopplinjer: de som är mellan punkter i det ”jämna” rutnätet (mellan svarta rutor), vi kallar dessa för typ 0, och de som är mellan punkter i det ”udda” rutnätet (mellan blå cirklar), vi kallar dessa typ 1. Vi förenklar analysen genom att bara titta på slutna konstruktioner, det vill säga där alla de yttersta svängpunkterna är av typ 0.

Enkel och svår design

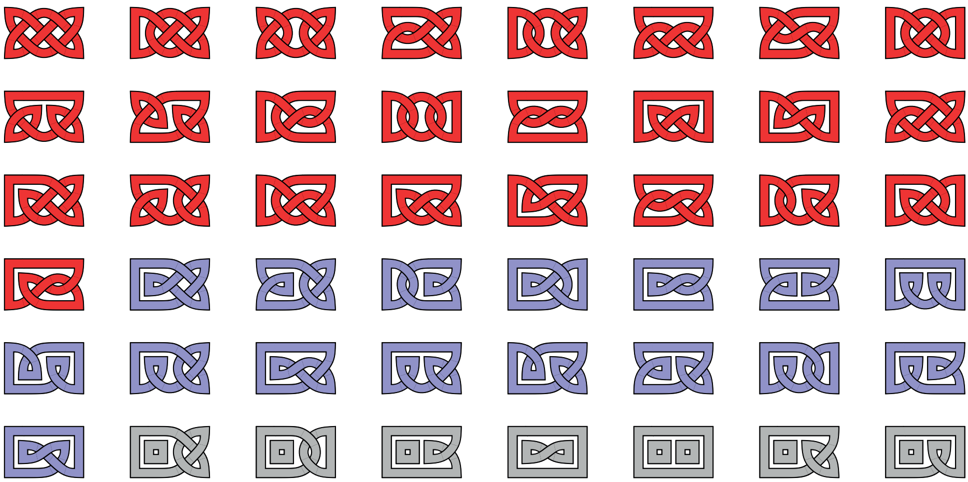
Hur många band finns det i en $m \times n$-design? Denna fråga visar sig vara enkel om designen inte innehåller några svängpunkter och mycket svår (och öppen) för design med svängpunkter. Utan några svängpunkter är svaret sgd(m, n), den största gemensamma delaren för m och n. Till exempel kommer en 3×2-design utan svängpunkter att ha exakt ett band, men en 4×2-design utan svängpunkter kommer att ha två band. Här visas alla $m \times 2$-mönster för $m = 1, 2 \ldots 5$:



Unika mönster

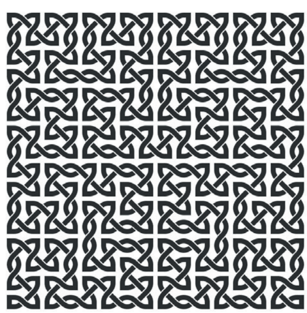
Hur många keltiska 3×2-mönster finns det? Vi tittar bara på slutna mönster, och då finns det sju svängpunkter i en 3×2-design. För varje svängpunkt finns det tre möjligheter: Vi har antingen inget stopp, ett stopp av typ 0 eller ett stopp av typ 1. Antalet mönster är $3^7 = 2187$. Däremot identifierar vi ofta mönster som är identiska som rotationer och reflektioner; vi delar upp mängden mönster i ekvivalensklasser. Med 3×2-mönster får vi 648 unika mönster. En begränsning som ofta leder till vackra keltiska mönster är att endast använda typ 1-stopp (förutom ramen, som består av typ 0-stopp). Med denna begränsning får vi bara två möjligheter för varje svängpunkt, och därför $2^7 = 128$ mönster. Om vi tar bort rotationer och reflektioner får vi 48 unika mönster.

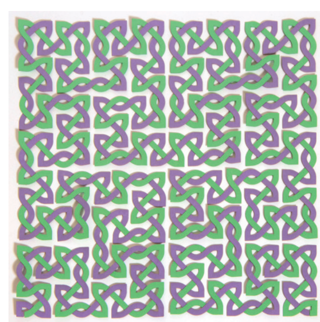
På nästa sida ser du alla de 48 designerna och de är grupperade i tre grupper. De sju gråa längst ner till höger är exakt de som inte är *sammanhängande* (de kan delas i två genom att rita en stängd kurva). De sexton lila som är i mitten är sammanhängande, men har alla *svansar* (när tre stopp börjar bilda en kvadrat). De återstående 25 designerna är exakt de som är sammanhängande och utan svansar.



Nämnarens omslag

På omslaget ser du en förstorad bild av ett keltiskt knutmönster genomfört i papper. Papper är perfekt för arbete som ligger mellan 2D och 3D, och keltiska knutar passar mycket bra i denna kategori: de presenteras vanligtvis i ett platt medium, men de har också djup, som omväxlande knutar, där korsningarna växlar mellan att vara under- och överlager. Omslagsbildens mönster är en 16 × 16-design där stoppen har placerats så att banden följer den berömda Hilbert-kurvan. Ur ett topologiskt perspektiv är denna design en ”unknot”, eller en trivial knut, där den ena halvan är gjord av grönt papper och den andra är gjord av lila papper. Eftersom banden överlappar varandra är det omöjligt att skära ut denna design från ett enda papper. Jag skar därför ut de två delarna var för sig, lindade dem runt varandra och kopplade ihop ändarna. Om man tittar noga längst ner till vänster och höger kan man se att det är just här banden byter färg.





LITTERATUR OCH LÄNKAR

Antonsen, R. & Taalman, L. (2021). *Categorizing Celtic Knot Designs*. Bridges Proceedings 2021. archive.bridgesmathart.org/2021/bridges2021-87.pdf.

Se många fler mönster och hur processen kan gå till på rantonse.no