Lasse Berglund

Fina små kvadrater

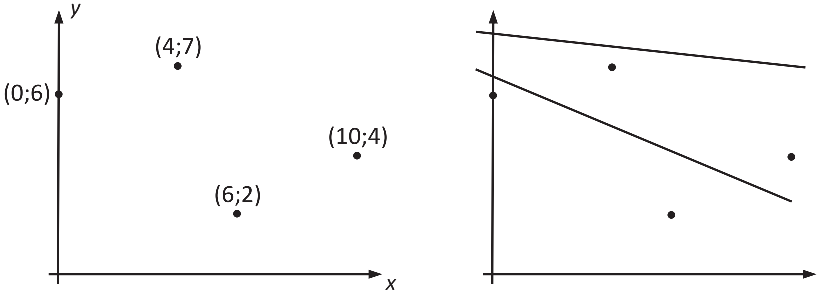
Författaren filosoferar över miniräknarens roll i dagens matematikundervisning. Även om den har varit en stor tillgång under snart 50 år gör den också tyvärr en del räknefel ibland, vilket han här ger exempel på.

Efter att ha tjänat oss i snart ett halvt sekel, är nu tiden troligen kommen för en gammal trotjänare att lämna plats för något modernare – jag talar om miniräknaren. Då den har varit med oss i vått som i torrt och visat både styrka och svaghet, följer här några rader som tar sin utgångspunkt i denna maskin.

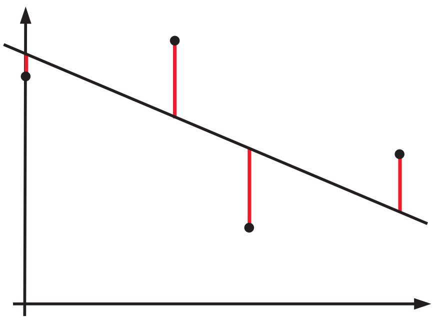
Minimering utan derivering

Varje Matematik 2-elev vet(!) vad räknarens LinReg-funktion ska användas till. Det är med den som man anpassar en rät linje till ett antal utspridda mätvärden. Hur maskinen utför detta, det vill säga hur den hittar den bästa anpassningen, ligger dock utanför Ma2-kursens ram. Metoden kräver ju kunskap om bland annat derivator. Man nöjer sig därför oftast med att nämna dess namn för klassen: matematiken bakom är något som kallas för *minsta kvadrat-metoden*. Men om vi här tillåter oss att förenkla problemet en smula så kommer vi rakt in i kärnan på Ma2, där andragradskurvan med sina symmetriegenskaper är en central del.

I figur 1a är fyra stycken koordinatpar utsatta. Uppgiften är att anpassa en rät linje så bra som möjligt till dessa fyra punkter. Linjen kan så klart ritas på en massa olika sätt. Figur 1b visar två förslag: ett ganska bra och ett dåligt.

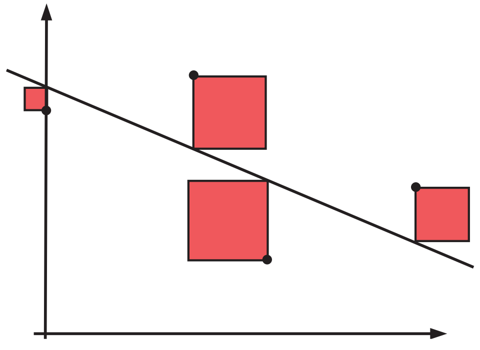


Figur 1a och 1b. Fyra punkter och två förslag på en rät linje.

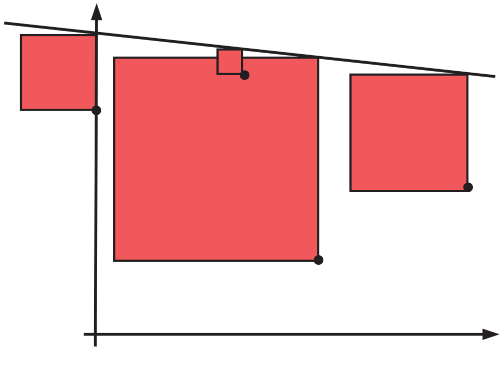


Figur 2. Ett försök att minimera summan av punkternas avstånd till linjen.

Om vi betraktar figur 2 kan vi konstatera att ett rimligt tillvägagångssätt för att få till en bra linje är att summan av de fyra vertikala röda sträckorna ska bli så liten som möjligt. Det är den grundläggande idén bakom denna metod. Men då vissa värden kommer att bli negativa – punkterna ligger ju på olika sidor om linjen – skulle man kunna lösa problemet med att exempelvis ta absolutbeloppet på alla avstånd. Gauss, som var den som skapade metoden, valde istället att kvadrera alla värden för att erhålla enbart positiva tal. Då gäller att summan av alla kvadrater ska ha en så liten area som möjligt. En geometrisk tolkning ges i figur 3, där det framgår att den totala kvadratarean i figur 3a är mindre än den totala kvadratarean i figur 3b.



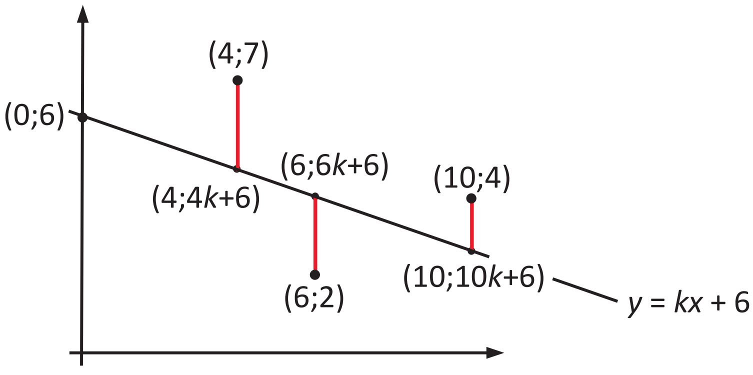
Figur 3a. En ganska bra anpassad linje till de givna fyra punkterna.



Figur 3b. En dåligt anpassad linje till de givna fyra punkterna.

En glad parabel

Vi återgår till figur 1a där vi har våra värden inprickade, se också figur 4. För att en Ma2-elev nu ska kunna följa med i ett resonemang fixerar vi den punkt som vi har på y-axeln (0;6), vilket då medför att vi ska bestämma den räta linje $y = kx + 6$ som sedan tar hänsyn till de tre övriga punkterna på bästa sätt.



Figur 4. Punkternas x- och y-värden.

Längden av en röd linje i figur 4 ges av det ena *y*-värdet minus det andra *y*-värdet. Summan av dessa linjers kvadrater kan vi kalla för S, en funktion som alltså kommer att bero av k, det vill säga $S = S(k)$. Vi får enligt figur 4:

$$S(k) = (4k + 6 - 7)^2 + (6k + 6 - 2)^2 + (10k + 6 - 4)^2$$

Öppnar vi upp och förenklar får vi: $S(k) = 152k^2 + 80k + 21$. Vi ser att vi har att göra med en glad parabel, det vill säga en andragradsfunktion med en minimipunkt. Vi söker alltså det värde på k som ger oss denna minimipunkt, som ju ligger på symmetrilinjen mitt emellan nollställena. Sätter vi därför $S(k) = 0$ och tillåter oss ett populärt begrepp bland eleverna, så ger *pq*:

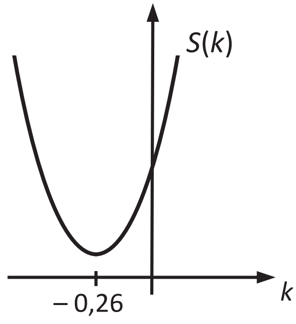
$$k = -40/152 \pm \sqrt{(40/152)^2 - 21/152}$$

Längre behöver vi inte räkna, då första termen, $-40/152 \approx -0{,}26$, av symmetriskäl inte är något annat än just vårt sökta värde på k. Därmed har vi funnit den bästa linjära funktionen: $y = -0{,}26x + 6$, och det har vi gjort utan att använda räknarens LinReg-operator. Istället har vi i ett förenklat exempel bekantat oss med de matematiska idéerna bakom dessa regressioner.

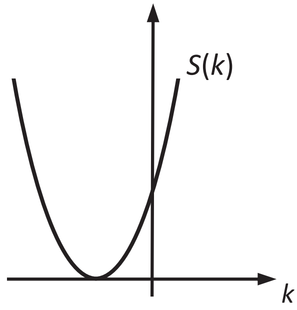
Några reflektioner

Från figur 5 ser vi att vår ekvation $S(k) = 0$ saknar lösning. Det är inte så underligt: $S(k)$ består ju av ett antal kvadrater innan förenklingen, och en summa av kvadrater kan aldrig bli negativ. Men även i de fall då en andragradsfunktion saknar nollställen utgör första termen i *pq*-formeln parabelns symmetrilinje. Att visa att det måste förhålla sig så, skulle kunna vara en lämplig uppgift för en intresserad Ma2-elev.

Att sådana här kvadratsummor aldrig kan bli negativa, hindrar inte att de teoretiskt sett skulle kunna bli noll, det vill säga ekvationen $S(k) = 0$, skulle kunna ha en dubbelrot. Vad har vi för situation i regressionsproblemet då? Vad är det för osannolikt som har inträffat i vår anpassning för att vi ska få en situation som visas i figur 6?



Figur 5



Figur 6

Låta udda vara jämnt

Allt det som vi har gjort hittills kan räknaren också göra, och dessutom bättre. Men räknaren har inte bara goda kvaliteter. Ibland räknar den fel. För balansens skull avslutar vi med ett exempel också på detta. Om vi därför på en TI-83:a slår in följande kvot:

$$\frac{4\,317\,626\,377}{29\,371\,608}$$

får vi 147, ett resultat som eleverna kan få fundera på en stund. De finner snart(?) att heltalet 147 som räknaren ger, är orimligt. Räknaren måste helt enkelt ha räknat fel. En udda täljare och en jämn nämnare kan aldrig nånsin ge en heltalskvot. Det inses av följande beräkning, där n, m och k är heltal:

$$\frac{\text{udda tal}}{\text{jämnt tal}} = \frac{2n+1}{2m} = k$$

Om vi multiplicerar ekvationen med $2m$, framgår det orimliga:

$$2n + 1 = 2mk$$

Vänsterledet är ett udda tal och högerledet är ett jämnt tal.

Om vi istället tar en jämn täljare och en udda nämnare så ger samma räknare:

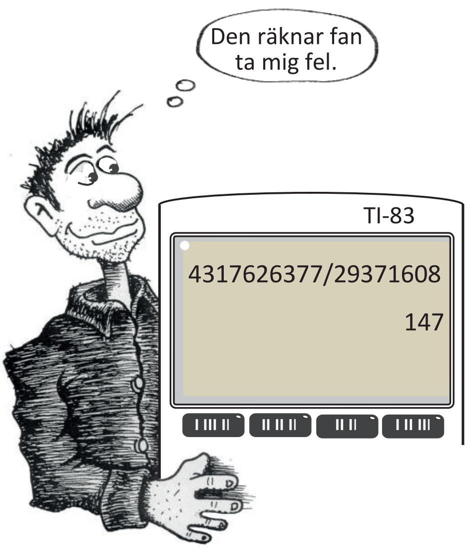
$$\frac{4\,317\,626\,392}{221} = 19\,536\,771$$

Kanske detta är en korrekt beräkning. En jämn täljare och en udda nämnare kan ju ge ett heltal, som exempelvis $12/3 = 4$. Vi gör som ovan, och betraktar det allmänna fallet.

$$\frac{\text{jämnt tal}}{\text{udda tal}} = \frac{2m}{2n+1} = k$$

Multiplikation med $2n+1$ och lite ommöblering ger: $2(m-nk) = k$. Här framgår, att om kvoten k är ett heltal, måste det vara ett jämnt tal. Detta på grund av faktor 2 i vänsterledet. Även detta var alltså en felaktig beräkning av räknaren.

I irritation men kanske än mer i vemod slänger jag räknaren åt sidan och provar istället att slå in en av kvoterna på datorn som jag sitter vid, och får tillbaka: 147,0000000340465. Kanske är det så att räknarens dagar är räknade.



Gauss och minsta kvadrat-metoden
Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, är en av historiens främsta matematiker. I början av 1800-talet hade astronomerna funnit en så kallad dvärgplanet på himlen, Ceres, men sedan tappat den ur sikte. De bad Gauss om hjälp, som då passade på att utveckla ännu ett av sina många bidrag till matematiken: minsta kvadrat-metoden. En kort tid därefter kunde astronomerna, tack vare Gauss beräkningar, återfinna sin försvunna planet på just den position som Gauss förutsagt.