Rationella och irrationella tal i undervisningen

En pensionerad matematiklärare tar oss med på ett vindlande strövtåg bland rationella och irrationella tal som börjar med pi och slutar med oändligheten.

Som nybliven pensionär satt jag på ett café och medan min livskamrat gick för att botanisera bland kakorna blev jag avbruten i mina tankar när jag hörde ordet ”pi” från ett bord bredvid. Där satt en kvinna i tidigare medelåldern i sällskap med tre flickor i 10–12-årsåldern, som inte hade några likheter i sitt utseende varken med varandra eller med kvinnan. Av samtalets innehåll och den beskrivna konstellationen utgick jag ifrån att relationen mellan kvinnan och flickorna inte var av familjär karaktär utan snarare av typen lärare och elever. En av flickorna undrade med entusiasm i rösten vad π, som de skulle läsa om, var. Jag spände öronen, då min nyfikenhet inte gick att behärska. Jag vet inte vad du själv skulle svara på en sådan fråga och här kan du pausa läsandet för att fundera på det svar som du skulle avge. Det svar som jag fick höra lät:

> *Pi är 3,14 och används när man räknar omkrets i cirklar.*

Jag blev inte särskilt förvånad över svaret, men det påminde mig om hur jag stiftade bekantskap med det intressanta talet. Situationerna skiljer sig avsevärt med tanke på att flickans fråga ställdes på ett café, medan jag satt på en lektion i årskurs 5 eller 6 och läraren introducerade idén. Det var inte alls något märkvärdigt i den handlingen. Vi fick rita cirklar och lägga sytråd runt om. Sedan mätte vi trådarnas längd med en linjal för att slutligen dividera med diameterns längd. Jag minns att svaren varierade kraftigt på grund av den bristfälliga noggrannheten som man kan förvänta sig av metoden. Sedan berättade läraren, att vi borde ha fått svaret 3,14: ”men egentligen är det en avrundning och decimalutvecklingen tar aldrig slut och det följer inte något system. Det talet är irrationellt. De rationella talen ger periodisk decimalutveckling”. Jag frågade vad irrationellt tal betydde och som svar fick jag att:

> *Man kan inte lyckas dela omkretsen och diametern i lika långa bitar, hur korta bitar man än väljer.*

Jag tvivlade inte på lärarens svar, men det gav mig en känsla av något mystiskt. Jag kunde inte släppa tanken och grubblade många gånger på det under min skoltid. Lätrarens påstående att alla rationella tals decimalutveckling var periodisk lämnade mig likgiltig. Jag mindes det som fakta men utan att se sammanhang.

När något tråkigt förvandlas till något roligt

I slutet av 70-talet, efter att ha fullföljt mina ämnesteoretiska studier, bestämde jag mig för läraryrket och hamnade på Lärarhögskolan i Uppsala. Vi studenter fick i tidigt skede prova på att undervisa och jag fick i uppdrag att ta upp avrundningsregler. Tydligen ansåg den snälle handledaren att det inte var särskilt betungande, men för mig kändes uppdraget som enormt tråkigt. Väl hemma på studentrummet kom jag på idén att omvandla ett rationellt tal från bråkform till decimalform. Ett bra exempel skulle vara en decimaltalsutveckling som avrundades åt olika håll beroende om det skulle vara en, två eller tre decimaler.

Då jag helst ville ha ensiffrig nämnare kom jag snabbt underfund med att jag inte hade så många val. Nämnarna 2, 4, 5 och 8 sorterades omedelbart bort. Nämnarna 3, 6 och 9 kändes inte heller användbara. Återstod nämnaren 7. Jag började dividera 1 med 7 och fick 0,1428..., vilket inte var det bästa valet, då avrundningar till en och till två decimaler båda var neråt. Mitt nästa försök blev att dividera 2 med 7 och där var resultatet 0,2857… och inte heller det föll mig i smaken. Men jag såg ett samband mellan de decimala formerna och fortsatte istället att dividera 1 med 7 tills jag fick 0,1428571… och insåg att jag inte behövde dividera mer för att hitta ett passande exempel. Division med 7 skulle alltid ge samma följd av decimaler, och om jag väljer decimalutvecklingen som börjar med 4, så får jag 0,4285714… Detta tal avrundas åt olika håll vid avrundning till en respektive två decimaler. Jag valde därför exemplet 3/7 = 0,42857143…

Ingången till den trista lektionen gav mig en en idé till en serie av lektioner. Av flertalet olika anledningar var det otänkbart att realisera min idé under praktiken. Ett skäl var bristande mod hos mig själv att ta upp det med handledaren. Om självförtroendet hade varit större skulle jag ändå bedömt det som orealistiskt eftersom undervisningen var starkt läroboksbunden och saknade tid för tankeutflykter. Det fina med min upptäckt var att vi lärarkandidater hade som uppgift på lärarhögskolan att komma med våra egna lektionsplaneringar. Den uppgiften som i det läget kändes enkel och redan var ”gratis”, blev dessutom uppskattad.

Min lektionsplanering

Jag vill i stora drag presentera den planering som jag gjorde. Jag utgick ifrån att eleverna redan visste att vissa bråk, som 1/2, 3/5 med flera, kunde skrivas i decimalform medan andra, som 1/3, blev man aldrig klar med och följaktligen angav med ett avrundat värde och inte ett exakt. Eleverna skulle få i uppdrag att hitta fler exempel på rationella tal i de två grupperna för att även hitta de mekanismer som styr vilken form det blir. Därefter skulle de oavslutade decimalutvecklingarna studeras för att ge eleverna möjlighet att upptäcka att de är periodiska. Även om de hittar några exempel med periodiska decimalutvecklingar behöver det inte betyda att så alltid är fallet. Det var nästa mål att eleverna skulle upptäcka även det. Här är det mest lämpligt att ta en decimalutveckling som är fullständig och en sådan finns hos sjundedelar. Jag ansåg att det var en stor fördel, om inte nödvändigt, att utföra divisionerna för hand. Efter att eleverna har delat 1 med 7 inser de, om uthålligheten är god, att decimalerna upprepas i cykler. Därefter ska även 2 divideras med 7. När så är gjort är det bra att upplysa eleverna om att lathet kan vara en dygd i matematiskt arbete och låta dem ange decimalutvecklingen av 3/7, helst utan att räkna. Om inte upptäckten kommer här, så sker det i nästa steg när 4/7 ”decimaliseras”. Nu finns underlag för att göra en del upptäckter som exempelvis sambandet mellan utvecklingarna av 3/7 och 4/7. Därefter kan eleverna kanske komma på utvecklingarna till 5/7 och 6/7 på ett annorlunda sätt än tidigare. Hitintills har det inte framkommit att varje decimaltal har om inte avslutad så periodisk decimalutveckling. Så här långt kommen planerade jag att själv som avslutning av lektionen dividera 3 med 7. Som bekant får jag som första decimal 4 och resten 2. Därefter blir andra decimalen 2 och resten 6. Vid nästa division får jag som tredje decimal 7, men kommer att få protester eftersom resten då blir 11. Eleverna inser att resttermerna endast kan anta värden som är lägre än 7. Det kan alltså bli resttermerna 0, 1, 2, 3, 4, 5 och 6. Troligen dröjer det inte länge innan någon elev kommer på att det inte kan bli 0 på grund av att då skulle det bli en avslutad decimalform.

Nu blir det uppenbart att periodens längd begränsas av nämnaren och är högst 1 lägre än nämnarens värde. Eleverna kan dra slutsatsen att alla rationella tal kan skrivas antingen i avslutad decimalform eller med en periodisk decimalutveckling.

Mina slutsatser

Det går att dra en hel del intressanta slutsatser av denna berättelse. Visserligen fastnade min lärares påstående om att alla rationella tals decimalutveckling var periodisk i mitt minne, men den kunskapen var av faktakaraktär och saknade liv. Den vetskapen fick färg först när jag gjorde den intressanta upptäckten. Detta bör nog beaktas i all undervisning och i synnerhet i matematik, som ju vilar på logikens grund. Min lärares påstående om irrationella tal kittlade min fantasi med sin mystiska karaktär.

Lärarkompetens

Det andra som jag tänker på är att jag från årskurs fem undervisades av ettämneslärare. Min matematiklärare undervisade enbart i matematik. Så gjorde även lärarna i andra ämnen. Det gjorde att deras kunskaper i ämnena i regel var betydligt högre än de lärare som undervisar elever i samma ålder i Sverige. Det var nog därför jag kunde få det svar jag fick om π, ett svar som svenska 11-åringar antagligen inte får av sina lärare. Visserligen smalnar utbudet av ämnen som en lärare ska behärska med stigande ålder på eleverna, men det sker sakta. För en högstadielärare med vanlig utbildningslängd gäller tre ämnen och för en gymnasielärare två ämnen. På nittiotalet hade man utbildning för 4–9-lärare och dessa matematiklärares kunskaper skulle förutom matematik omfatta de tre klassiska naturvetenskapliga ämnena och teknik. Det ger betydligt lägre kunskaper per ämne som synergieffekterna inte kan uppväga.

Vid ett av mina besök hos en lärarstudent på högstadiet beskrev studentens handledare, vars hjärta slog för naturvetenskapliga ämnen, matematikämnets diffusa karaktär med orden *Hur kan man påstå att 0,99 = 1?* Man kan ana att läraren som elev eller student har fått lära sig att omvandla tal från periodisk decimalform till bråkform och då fått höra att en periodisk decimalutveckling av längden ett:

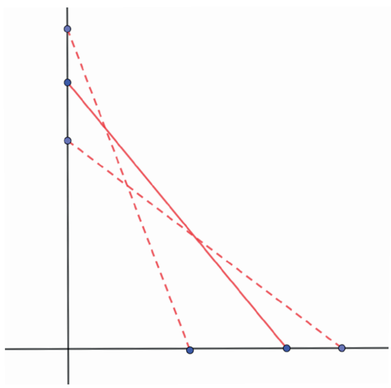
$$0{,}99999\ldots = 1.$$

Tolkning av 0,9999… som 0,99 är besynnerlig för den som är satt att undervisa i matematik men nog ganska vanlig bland flertalet människor. Det ser man bland annat i kommersialismens lyckade strategier för att ge sken av låga priser och att det fungerar trots skolans goda intentioner att undervisa hur man avrundar.

Låt tankarna sväva

Om vi återgår till den beskrivning av irrationella tal som min ettämneslärare bjöd mig på, så kan man ställa sig frågan om det är lämpligt att ta upp saker som elever inte är i stånd att förstå just i stunden. Det är inte särskilt troligt att klassens elever fick känslor av otillräcklighet och kände sig sårade av lärarens svar. Det kan däremot ha triggat några fler än mig till funderingar.

Hur kan dessa funderingar se ut? Man kan ställa sig frågan om relationen mellan två godtyckliga sträckors längder oftast är rationell eller irrationell. Det är enkelt att skapa två sträckor med rationellt förhållande genom att utgå från en referenssträcka och konstruera en sträcka exempelvis med tre längder av referenssträckan och en annan med fem längder. Förhållandet mellan dem är då 3:5 eller 5:3. Låt oss istället alstra sträckor där förhållanden mellan deras längder ska täcka hela mängden reella tal. Detta kan göras genom konstruktion av två vinkelräta linjer. Vi förbinder sedan en punkt på vardera linje med en sträcka och får därmed en rätvinklig triangel. Om vi låter sträckans ändpunkter glida lägst de vinkelrätta linjerna får vi en kontinuerlig ström av rätvinkliga trianglar med konstant hypotenusa och variabla kateter.



En del av de trianglar som bildas kommer att bli pythagoreiska, det vill säga uppfylla två villkor. Det ena villkoret, som är rätvinklighet, är redan uppfyllt. Det andra villkoret är att sidornas förhållanden ska vara rationella. Detta är ekvivalent med att sidornas längder kan uttryckas med mätetal som är heltal. Det inser man lätt om man förlänger sidornas mätetal till gemensam nämnare och multiplicerar sidornas längder med den nya nämnaren. Den nya triangeln, som har heltalssidor är likformig med den ursprungliga triangeln.

Pythagoreiska trianglar är betydligt sällsyntare än icke-pythagoreiska rätvinkliga trianglar, en erfarenhet som i alla fall de flesta matematiklärarna delar. Det skulle inte förvåna mig om deras elever är ovetande om den saken, då de pythagoreiska får mycket större plats i undervisningen. Om man bildar förhållanden mellan kateter på en av linjerna och hypotenusan så får man alla reella tal i intervallet]0,1] och om förhållandena ska vara mellan hypotenusan och kateter på en av linjerna får vi reella tal i intervallet [1,∞[. De flesta av förhållandena är irrationella och bland dem kan vi hitta de välbekanta π och e samt φ och Φ.

Till samma insikt skulle man kunna komma om man hade börjat alstra decimaltal med hjälp av någon sorts siffergenerator, exempelvis en tiosidig tärning. Sannolikheten att de alstrade talens decimaler skulle uppvisa perioder är oändligt liten. Det kan kanske underlätta att förstå att en oändlighet kan vara oändligt många gånger större än en annan oändlighet.

Epilog

Efter introduktion av ett nytt begrepp brukar det hantverksmässiga ta plats och så var det även efter min lärares introduktion av π. Med utgångspunkt från diametrar och radier beräknades omkretsarna och vice versa. På sextiotalet var förekomsten av miniräknare i skolvärlden bokstavligen obefintlig. Det är inte så behagligt att utföra multiplikationer med 3,14 men att dividera med samma tal kan framkalla rysningar i kroppen. Dessa hinder kunde lätt övervinnas med ett närmevärde i bråkform, som ligger något närmare det riktiga värdet av π än 3,14. Då fick eleverna chansen att träna på att räkna med tal i bråkform och sådana tillfällen dyker inte så ofta upp i dagens matematikundervisning.

$$\pi \approx 3\frac{1}{7} \text{ eller } \pi \approx \frac{22}{7}$$

Om vi hade en pekpinne vars bredd var lika med en punkts utsträckning, och med den skulle peka på en tallinje, då skulle sannolikheten att peka på ett rationellt tal vara oändligt liten. Med största sannolikhet skulle vi peka på ett irrationellt tal. Mängden av reella tal består till största delen av irrationella tal av vilka de flesta saknar namn. De duger inte heller att räkna med i vardaglig bemärkelse. Bredvid varje irrationellt tal, trots att de är oändligt fler än de rationella, går det alltid att hitta en rationell granne – hur nära som helst.

Tyvärr läggs det större fokus på de irrationella talens rationella grannar än på de irrationella talens väsen. Det faller nog många gånger i skymundan att π är relationskonstant och dess närmevärde får oförtjänt stor plats. Det fick en elev i årskurs 8 erfara när hon angav $25\pi\,\mathrm{m}^2$ som svar på en uppgift som gick ut på att beräkna arean av ett område som fick betas av en get tjudrad med en 5 meter lång kedja fäst vid en påle. Lärarens kommentar var *Vet du inte hur mycket π är?* Man kan undra om läraren visste det om man hade krävt större noggrannhet än två decimaler.