Johan Sidenvall

Ökad matematisk förståelse genom problemlösning

Ett centralt skäl till elevers svårigheter med matematik är att undervisningen domineras av utantillinlärning och arbete med rutinuppgifter trots att vi vet att en undervisning som lyfter fram problemlösning är mer effektiv för att utveckla matematisk förståelse. Genom lärarens aktiva val av uppgifter och sätt att stödja elever kan lärandet förbättras.

Det är inte ovanligt att jag möter nya elever som säger *Jag kan inte matte, ingenting fastnar i min hjärna* eller *Jag tycker att jag kan det när jag är på lektionen, men sedan är det borta när jag sätter mig med matten hemma*.

För att elever ska lära sig matematik på ett förankrat sätt, med djup och – i någon mening – på riktigt, så behöver de mötas av en undervisning som bjuder in och engagerar dem att anstränga sig att jobba med matematik. De behöver även tilldelas ett ansvar för att vara medskapare av matematiken. Detta synsätt har kommit att prägla både den svenska och många andra länders läroplaner, men tyvärr ofta inte fått fullt genomslag i undervisningen. James Hiebert, som studerat den amerikanska situationen, menar att ett centralt skäl är att undervisningen i alltför stor utsträckning domineras av utantillinlärning och arbete med rutinuppgifter. Detta verkar till viss del ske på bekostnad av en undervisning som låter elever arbeta med att komma på lösningsmetoder till uppgifter som de möter – det vill säga jobba med problemuppgifter.

Elever som arbetar med problemuppgifter ökar sin matematiska förståelse i högre grad än elever som arbetar med rutinuppgifter som kan lösas genom – för eleven – kända lösningsmetoder. Det är inte utantillinlärning i sig som är problemet. Tvärtom, att komma ihåg regler och procedurer är en förutsättning för att göra arbetet med matematiken effektivt och hanterligt. Problemet är snarare att en överbetoning på utantillinlärning och imitation av givna procedurer sker på bekostnad av utvecklandet av andra matematiska förmågor. Elever kan bara lära sig det de får förutsättningar att lära sig. Om elever ges goda förutsättningar att arbeta med matematiska problemuppgifter, ökar förutsättningarna för en fördjupad förståelse av matematik. När elever får tillfälle att arbeta med problemuppgifter ges de möjlighet att greppa mer än isolerade idéer. Det innebär också att de testar hypoteser samt motiverar och utvärderar sina slutsatser.

Skäl till ytligt lärande

Trots insikter om nackdelar med en undervisning som innebär ett ytligt utantillinlärning samt att vi har en läroplan som föreskriver en mer processinriktad syn på lärandet, där bland annat problemlösning betonas, har en förändrad undervisning svårt att etablera sig i klassrummen. Detta kan ha flera orsaker.

1. Det är förhållandevis enkelt att undervisa genom att visa lösningsmetoder för elever, som de sedan får använda sig av utan att nödvändigtvis behöva förstå dem.
2. På kort sikt är det bedrägligt "effektivt" att låta elever lösa uppgifter med hjälp av kända lösningsmetoder. Det går snabbt att komma igång från lärargenomgång till att lösa flera uppgifter. Ibland kan elever lära ganska avancerade metoder utantill, utan att behöva förstå vad de egentligen gör för matematik. Jag som lärare kan känna den falska förvissningen att jag faktiskt lär ut och eleverna tror att de har förstått.
3. Lärande via problemlösning eller annorlunda uttryck lärande genom att skapa en egen lösningsmetod kräver mer ansträngning från lärare och elever än lärande genom att följa förutbestämda lösningsmetoder. Det är svårare för lärare att ta fram riktigt bra uppgifter, göra ett undervisningsupplägg som triggar elever att anta en utforskande ansats och ge hjälp som inte serverar lösningar men stödjer utforskandet.

Uppgifters roll för lärande

Matematikuppgifter har en central roll i matematikundervisning. Vilka typer av uppgifter som elever jobbar med kommer att påverka vad de har möjlighet att lära (Shield & Dole, 2013). Grovt kan man säga att det finns två typer av uppgifter som elever jobbar med. Dels rutinuppgifter där eleven på förhand känner till lösningsmetoden och dels problemuppgifter där eleven behöver skapa lösningsmetoden.

Ett exempel på betydelsen av uppgiftens konstruktion för elevers lärande gjordes i en studie där man lät gymnasieelever göra uppgifter som var konstruerade på två olika sätt (Jonsson m fl, 2014). Den ena gruppen fick lösa uppgifter av denna typ:

> När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger.
>
> 
>
> Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor.
>
> Om x är antalet kvadrater som ska läggas i rad så kan man beräkna antalet tändstickor y med funktionen $y = 3x + 1$.
>
> *Exempel:* Om 4 kvadrater ska läggas i rad behövs
>
> $y = 3x + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ tändstickor.
>
> Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

Här fick alltså eleverna tillgång till lösningsmetoden genom formel och exempel, det vill säga "3 gånger antal kvadrater plus 1, så får man antal tändstickor".

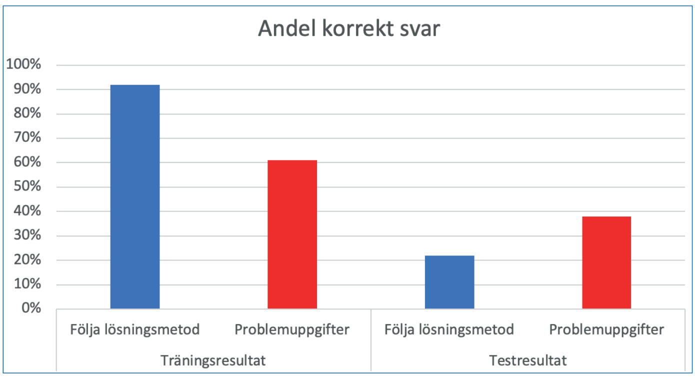
Den andra gruppens försökspersoner fick en uppgift där frågan vara likadan, men den innehöll inte information om lösningsmetoden:

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger.

Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor.

Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

I strikt mening fick dessa elever mindre information än den förra gruppen. Eleverna behövde själva lista ut hur tändsticksmönstret utvecklade sig och hur sambandet mellan antal kvadrater och antalet tändstickor var. Eleverna fick sedan jobba med flera uppgifter av den typen som de blivit tilldelade.



Resultaten från studien visar att vid träningstillfället löste elevgruppen som haft tillgång till lösningsmetoden drygt 90 % av uppgifterna korrekt (första blå stapeln). Detta var förväntat eftersom de hade i stort sett all information för att lösa uppgifterna. I elevgruppen som inte haft tillgång till lösningsmetoder utan varit tvungna att anstränga sig lite mer för att lösa uppgifterna var det cirka 60 % av uppgifterna som löstes korrekt (första röda stapeln). Det riktigt intressanta med studien var resultatet vid ett test en vecka senare. Vid testtillfället fick eleverna göra liknande uppgifter som vid träningen, för att forskarna skulle se i vilken omfattning som de mindes vad de hade tränat på – och i den meningen vad de faktiskt hade lärt sig. Eleverna som behövt skapa lösningsmetoder, det vill säga löst problemuppgifter, hade i slutänden lärt sig mer än de elever som hade haft tillgång till de olika lösningsmetoderna vid träningstillfället.

Slutsatsen från studien och andra liknade studier är att eleverna som inte har tillgång till lösningsmetoder är tvungna att anstränga sig mer och tvingar därmed sig själva att skapa kopplingar mellan matematiska begrepp. Då förstår de mer, lär sig matematiken på ett djupare plan och kommer ihåg bättre. Det omvända gäller för gruppen som inte behövt anstränga sig vid träningstillfället och som i större utsträckning glömt vad de gjort en vecka tidigare. Ytterligare en slutsats som kan dras från denna och liknande studier är att elever bara kan lära sig sådant som de får förutsättningar att lära sig. De som inte ges förutsättningar att göra nya matematiska kopplingar genom att själva skapa lösningsmetoder får sämre förutsättningar att lära sig ny matematik.

Uppgifter från läroböcker

Eftersom de flesta uppgifter som elever arbetar med finns i deras läroböcker, kommer lärobokens fördelning av rutin- och problemuppgifter på olika svårighetsnivåer att ha en stark inverkan på elevernas möjlighet att lära sig matematik. Flera studier av svenska förhållanden har visat att en stor del av lektionstiden ägnas åt arbete med lärobokens uppgifter. Mellan 80 % och 95 % av uppgifterna i svenska läroböcker för gymnasiet kan lösas genom imitation av lösta exempel. De problemuppgifter som erbjuds återfinns nästan uteslutande bland läroböckernas svårare uppgifter (exempelvis kallade ”c-uppgifter” eller ”nivå 3-uppgifter”). Samtidigt finns det indikationer på att många av eleverna sällan arbetar med bokens svårare uppgifter. Sammantaget gör detta att elever möter få problemuppgifter under sin lektionstid, vilket riskerar att inverka negativt på deras möjligheter att lära sig matematik.

Lärarens sätt att hjälpa

Den andra delen som spelar stor roll för elevernas lärande är hur lärare hjälper dem. Antag att en elev behöver hjälp med $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ och läraren då lotsar fram eleven till lösningen genom att tala om alla steg: *multiplicera 1:an ovanför 2:an och 2:an med 2, sätt på gemensamt bråkstreck, addera de övre talen*. Det kan kännas skönt för eleven att kunna ta rygg på läraren, men det som samtidigt sker är att ansvaret för skapandet av matematik förskjuts från eleven till läraren. Eleven som aktör och medskapare av matematik förminskas. Bilden av att det är läraren som sitter inne med svaren förstärks och eleven är bara satt att lotsas fram till en lösning. Det som också händer när läraren tar bort alla svårigheter för eleven, all ansträngning, är att läraren också tar bort elevens möjligheter att förstå något nytt.

Hur kan man då ändra undervisningen så att elever regelbundet möter uppgifter där de behöver skapa lösningsmetoder och därmed utsättas för en positiv ansträngning? Och hur kan lärare hjälpa elever utan att lotsa?

Undervisning som bygger förståelse

Elever i länder som presterar bäst i världen i jämförande studier ägnar en majoritet av undervisningstiden åt arbete med problemuppgifter. Men det räcker inte med att elever har en obegränsad tillgång till problemuppgifter. En lösningsmetod behöver vara inom räckhåll för eleverna, samtidigt som de får uppleva viss positiv ansträngning där de strävar mot ny matematik och ser kopplingar till tidigare känd matematik. Förutom att uppgifternas lösning behöver vara inom räckhåll för eleverna, spelar det roll hur lärare och elever använder problemuppgifterna i klassrummet.

Val av uppgifter

Olika uppgiftstyper har olika syften. Är syftet att eleverna ska lära ny matematik och utveckla förståelse för nya begrepp och metoder kan de med fördel ägna sig åt problemlösning. Ska de istället träna på metoder som de redan har förstått är rutinuppgifter att föredra.

Ett syfte kan vara att eleverna kommer fram till formaliserade metoder för att lösa uppgifter. Vid ett mer traditionellt lektionsupplägg skulle metoderna ha presenterats av läraren innan de påbörjade arbetet med uppgifterna.

Exempel på lektionsupplägg

Ett alternativt lektionsupplägg innebär att först låta elever undersöka och upptäcka hur matematiken fungerar. I exemplet nedan är syftet att eleverna ska förstå hur addition av bråk fungerar. Utgångspunkten är en problemuppgiften där eleverna inte kan lösningsmetoden på förhand:

> Amina äter en fjärdedel av en pizza. Anna äter hälften av en annan lika stor pizza. Hur mycket pizza har de tillsammans ätit?

Här kan man med fördel låta eleverna undersöka, rita, använda plockmaterial och så vidare för att inse och på djupet förstå varför man behöver skapa lika stora andelar för att addera bråken. Man kan tänka sig att en första lösningsidé skulle kunna vara $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$. Vid närmare eftertanke kan eleverna inse att $\frac{2}{6}$ är mindre än $\frac{1}{2}$, för att sedan söka andra vägar mot en lösning.

Istället kanske de ritar pizzor och så småningom inser att $\frac{1}{2}$ kan betraktas som $\frac{2}{4}$ och att $\frac{1}{4}$ och $\frac{2}{4}$ summeras till $\frac{3}{4}$. När eleverna väl förstått och gjort motsvarande upptäckter på liknande uppgifter och i diskussioner i klassen kan man kommande lektion träna på metoden, addition av oliknämniga bråk, genom att låta eleverna lösa rutinuppgifter. Då kan man med fördel göra flera uppgifter av samma typ, för att metoden ska sätta sig. När man har förstått någonting, då är det inte heller ovanligt att man tycker att det är roligt och känns mer meningsfullt.

Lärares agerande

Hur kan då läraren hjälpa utan att lotsa och utan att ta över ansvaret för problemlösandet från eleven och samtidigt låta eleven vara kvar i en positivt ansträngande situation vid uppgiftslösning? Antag att en elev har kört fast på pizzauppgiften ovan. Läraren hjälper och stödjer då bäst genom att ta reda på var i lösningsprocessen som eleven befinner sig och ger återkoppling som matchar den specifika svårigheten. På så sätt bibehålls utmaningen, eleven får fortsatt anstränga sig för att lösa uppgiften och behåller även ansvaret för att lösa den. Det kan kännas utmanande och inte helt bekvämt för eleven att få denna typ av hjälp men på sikt visar det sig att elever vänjer sig och upplever undervisningen som mer meningsfull. Att som lärare ge denna sorts hjälp och bedriva denna typ av undervisning kan vara svårt, men det är belönande och gör undervisningen så otroligt mycket roligare.

Sammanfattning

Elevers förutsättningar att lösa uppgifter genom att skapa lösningsmetoder begränsas av att det inte finns problemuppgifter av olika svårighetsgrad i alla delar av läroboken och av den lotsande hjälp som en elev kan få av sin lärare. För att förbättra elevens förutsättningar bör lärare låta eleven arbeta med fler och lagom svåra problemuppgifter samt stödja elever som kört fast genom att anpassa sitt stöd så att det matchar varje elevs svårighet. I förlängningen kan detta leda till ökad självständighet hos eleven i problemlösandet.

Referenser finns under Litteratur på nästa uppslag.

LITTERATUR

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (red), *A research companion to Principles and standards for school mathematics* (s 5–23). National Council of Teachers of Mathematics.

Jonsson, B., Norqvist, M., Lithner, J. & Liljekvist, Y. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 36,* 20–32.

Shield, M. & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183–199.

Sidenvall, J. (2019). *Lösa problem: om elevers förutsättningar att lösa problem och hur lärare kan stödja processen.* Doktorsavhandling. Umeå universitet.

Smith, M. S., Stein, M. K. & Brogren, M. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik: för att planera och leda rika matematiska diskussioner: med handledning för fortbildning.* Natur & Kultur.

Klickbar länk till avhandlingen finns på Nämnaren på nätet.