Lei Yu Jiang

Visualisering i problemlösning

När lärare presenterar en matematikuppgift kan det vara svårt att bara genom talade ord få eleverna att förstå innehållet. Här ger författaren förslag på hur visualiseringar kan hjälpa eleverna både att förstå uppgiften och att utveckla sin tankegång för att lösa den.

Vi hör ibland från elever att ”matte är för svårt för mig”, ”matte är inte min grej”, ”jag förstår alla ord i uppgiften men vet inte hur jag kan börja lösa den”. Varför är det så? En förklaring kan vara att eleverna inte kan koppla uppgiften till den verkliga värld de lever i och därför blir uppgiften svår att förstå. Matematik är ett ämne där kunskaperna ofta är abstrakta. När yngre elever har läst en uppgift och inte kan återkalla en liknande situation i verkligheten som de är välbekanta med, kan det uppstå svårigheter för dem att förstå sammanhanget, vilket leder till att de inte vet hur problemet kan lösas. Då blir matematik självklart svårt för dem.

En annan förklaring kan vara att eleverna ännu inte har fått erfarenhet av tillräckligt många material och verktyg som kan används i problemlösningen. När man gör kläder, behöver man tyg och tråd (material) samt sax och symaskin (verktyg); när man lagar mat behöver man pasta och köttfärs (material) samt spis och gryta (verktyg). Detsamma gäller för matematikuppgifter. Olika matematikkunskaper utgör material medan grafer, tallinjen och tabeller kan betraktas som verktyg vid problemlösningen. Om eleverna är utrustade med de material och verktyg som behövs, blir matematik inte längre onåbar för dem.

I en artikel i Nämnaren presenterar Åsa Nilsson och Rosanna Sköldvinge en modell som visar de många olika förmågor som ingår i en vidgad problemlösningskompetens. Två av dessa är *textförståelse*, det vill säga förståelse för skriven text och samspelet mellan text och bild; och i*nre mentala bilder*, som avser förmågan att abstrahera matematik i mentala bilder och genom olika representationer. De lyfter upp vikten av elevers förmåga att kunna visualisera texten och tankegången vid matematisk problemlösning.

Ord, bild, lösning och kontroll

En effektiv problemlösningsrutin kan delas upp i fyra steg: ord, bild, lösning och kontroll.

1. ORD. Börja problemlösningen med att tillsammans läsa uppgiften noga och försöka att inte missa någon detalj.
2. BILD. När eleverna har läst hela uppgiften minst en gång och fått en ungefärlig uppfattning av vad uppgiften handlar om, kan ni omvandla texten till relevanta visuella representationer, gärna mening för mening.

3. LÖSNING. När uppgiften har konkretiserats och visualiserats brukar det bli lättare för eleverna att hitta lösningen. Här kan varje elev också ta för vana att visualisera hela tankegången så att onödiga misstag kan undvikas. Sedan går det att skriva ner en fullständig lösning. Att tänka tar alltid mer tid än att skriva ner proceduren och svaret.
4. KONTROLL. Kontroll är också ett mycket viktigt steg i problemlösningen, då slarvfel inte är ovanliga. Kontrollera alltid från början: har vi förstått uppgiften rätt eller inte? Sedan kan uppgiften göras om, gärna på ett annat sätt, för att se om det ger samma resultat.

Material och verktyg i problemlösning

I den här artikeln kommer några exempel illustrera hur texten, och eventuellt tankegången, kan visualiseras vid problemlösning. Fokus ligger på problemlösningsrutinens tre första steg ord–bild–lösning där tankegångar genom visualisering får ta stor plats.

Uppgifterna i exemplen är hämtade från Kängurutävlingen åren 2000–2020, men här har svarsalternativen tagits bort. Uppgifterna är verklighetsanknutna samt har karaktär av intresse-, nyfikenhets- och lustskapande hos eleverna. Kängurutävlingen är inkluderande och alla elever, på olika nivåer, i olika ålder och från olika länder, kan hitta passande uppgifter och känna sig utmanade. Tre olika visualiseringsverktyg demonstreras: *pilar*, *rutor* och *sträckor*. Dessa verktyg kan effektivt förbättra elevers förståelse av uppgifterna. Jag har valt uppgifter av olika karaktär. Tillsammans utgör de material som på olika sätt kan berika elevernas kunskapsinhämtning.

Pilar

Pilar kan användas för att visualisera en händelses *utveckling*, *riktning* eller *förändring*. Exemplen här handlar om omkastnings-, uppräknings- och tidberäkningsproblem.

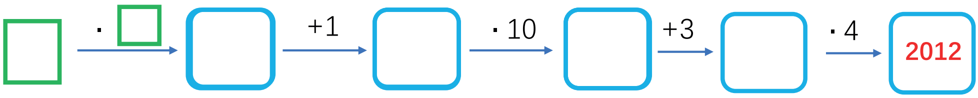
Ett omkastningsproblem

Pilar kan vara ett effektivt visualiseringsverktyg i problem där talet ändrar sig stegvist med flera operationer, som uppgift 17 i Ecolier 2012:

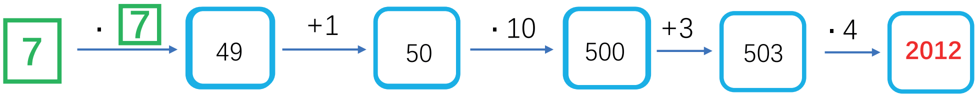
> Vi har ett tal. Vi multiplicerar det med sig själv, lägger till 1, multiplicerar resultatet med 10, lägger till 3 och multiplicerar resultatet med 4. Då har vi 2012.
>
> Vilket tal hade vi från början?

Här visas hur texten i uppgiften kan tolkas matematiskt och samtidigt visualiseras steg för steg:

- Vi har ett tal.
- Vi multiplicerar talet med sig själv,
- lägger till 1,
- multiplicerar resultatet med 10,
- lägger till 3,
- och multiplicerar resultatet med 4.
- Då har vi 2012.



Sedan visas tankegångarna från sista steget och beräknas stegvis till början:



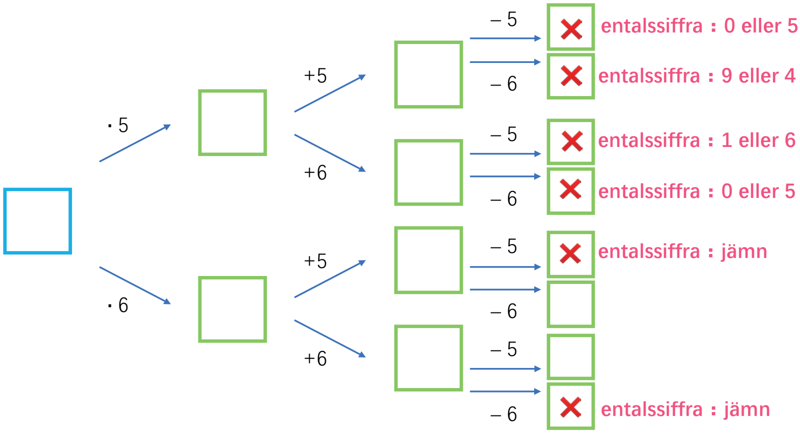
På det här sättet kan det bli lättare för eleverna att förstå och lösa uppgiften. Dessutom kan det minska eventuella misstag som kan uppstå vid uträkningen.

Ett uppräkningsproblem

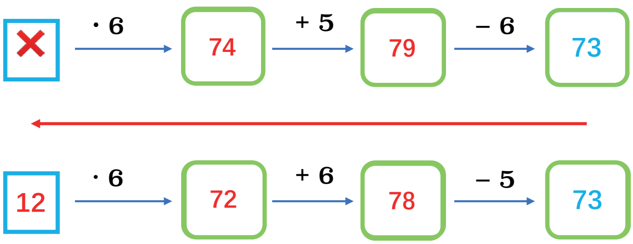
Pilar kan också användas för att visualisera uppräkningsproblem där olika möjliga utfall finns och behöver undersökas, som uppgift 21 i Benjamin 2007.

> Olga tänkte på ett heltal. Ivan multiplicerade Olgas tal med 5 eller med 6. Boris adderade 5 eller 6 till Ivans resultat. Anja subtraherade 5 eller 6 från Boris resultat. Anjas resultat blev 73.
>
> Vilket tal hade Olga tänkt på?

Vi kan skapa ett slags träddiagram med förgrening för att illustrera alla möjliga vägar från Olgas tänkta heltal till Anjas resultat 73. Därefter kan vi genom att analysera entalssiffran på alla åtta möjliga utfall av Anjas resultat utesluta sex av de åtta utfallen:



Bara två utfall behöver undersökas. Här blir det ett omkastningsproblem igen och resultaten fås genom att tänka i omvänd ordning.

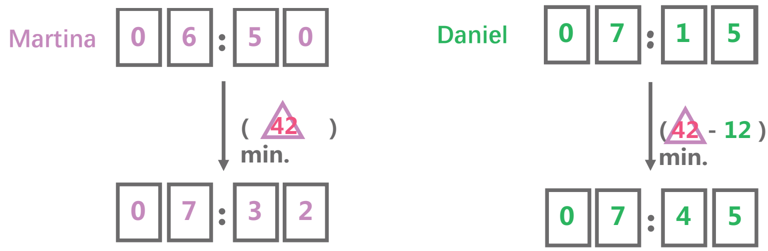


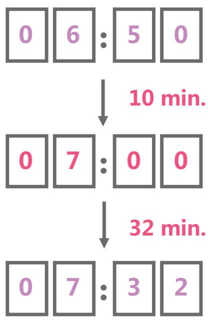
Ett tidberäkningsproblem

Uppgiften 14 i Ecolier 2002 handlar om att beräkna tid.

> Martina går hemifrån klockan 06.50 och kommer till skolan klockan 07.32. Hennes kamrat Daniel kommer till skolan 07.45. Han behöver 12 minuter kortare tid än Martina för att gå till skolan.
>
> Vilken tid går Daniel hemifrån?

Problemet kan visualiseras med hjälp av pilar:





Eftersom det är annorlunda regler då man beräknar tid än vid räkning med tal i bas tio kan det uppstå svårigheter för en del elever. För att minska svårigheten och undvika slarvfel rekommenderas att en bastid, exempelvis ett helt klockslag, används vid uträkningen. Det är inte helt enkelt att direkt räkna antalet minuter mellan klockan 06:50 och klockan 07:32. Om vi istället använder klockan 07:00 som bastid, blir det enklare att få fram antalet minuter från 06:50 till 07:32, det vill säga 10 + 32 = 42 min. Eftersom Daniel behöver 42 – 12 = 30 min går Daniel hemifrån klockan 07:15.

Rutor

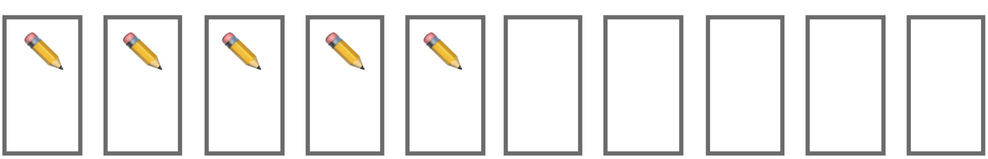
Rutor kan användas för att *representera antal* eller *gruppera objekt*, exempelvis i staplingsproblem, köproblem eller huvud- och benproblem.

Staplingsproblem I

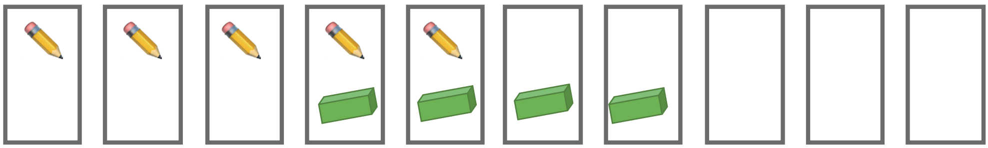
Uppgift 16 i Ecolier 2020 är ett staplingsproblem där ett eller flera objekt dubbelräknas. En sådan uppgift kan vara enkel att lösa algebraiskt, men först efter att eleven har förstått relationerna mellan de olika angivna värdena. Förståelse kan nås genom visualisering med hjälp av rutor.

> Tor har 10 lådor. I fem av lådorna lägger han en penna. I fyra av lådorna lägger han ett suddgummi. I två lådor ligger det sen både en penna och ett suddgummi.
>
> Hur många lådor är tomma?

Tor har 10 lådor, så tio rutor ritas för att representera dem. I fem av lådorna lägger han en penna:



I fyra av lådorna lägger han ett suddgummi, men i vilka fyra lådor? Läser vi vidare får vi veta att i två lådor ligger det sen både en penna och ett suddgummi. Nu kan vi lägga till fyra suddgummi enligt beskrivningen:



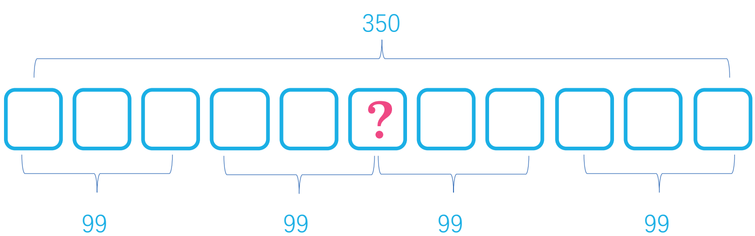
Nu kan vi direkt se att det är tre lådor som är tomma. I den här uppgiften finns det två lådor som innehåller både en penna och ett suddgummi och de är dubbelräknade, en gång i de fem lådor med penna och en annan gång i de fyra lådor med sudd. Efter visualiseringen kan det bli enkelt även för lågstadieelever att räkna uppgiften med formeln $10-(5+4-2)=3$ lådor.

Staplingsproblem II

Uppgiften 24 i Benjamin 2019 är också ett staplingsproblem.

> Ett persontåg består av 11 vagnar. Det är sammanlagt 350 passagerare på hela tåget. I tre vagnar som är placerade efter varandra finns det 99 passagerare, oavsett var i tåget man räknar.
>
> Hur många passagerare finns det i den sjätte vagnen?

Först skapar vi 11 rutor för att representera de 11 vagnarna i persontåget. Det är sammanlagt 350 passagerare på hela tåget. I tre vagnar som är placerade efter varandra finns det 99 passagerare, oavsett var i tåget man räknar. Den sjätte vagnen ligger i mitten, så om vi räknar grupper om tre vagner = 99 passagerare från varje ända av tåget ser vi att den sjätte vagnen kommer att tillhöra två 3-grupper enligt bilden. Vi får sammanlagt fyra grupper om 99, där passagerarna i den sjätte vagnen har räknats två gånger.



Därför kan antalet passagerare i den sjätte vagnen räknas ut genom att summan av de fyra 99:orna minus summan av antalet passagerare i alla 11 vagnarna på 350. Då finns det $4 \cdot 99-350=46$ passagerare i den sjätte vagnen.

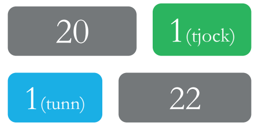
Kö-problem

Kö-problem brukar handlar om att räkna antalet personer (eller saker) som står i kö. Dessa uppgifter brukar inte vara svåra, men slarvfel uppstår ganska ofta. När visualisering med rutor används här kan slarvfelen bli färre och eventuellt elimineras. Exempelvis kan vi se på uppgift 23 i Ecolier 2020.

> På en hylla står det en rad böcker. Böckerna är olika tjocka. Det står 20 böcker till vänster om den tjockaste boken och 22 böcker till höger om den tunnaste boken. Både den tjockaste boken och den tunnaste boken står bredvid den äldsta boken.
>
> Vilket är det minsta möjliga antalet böcker på hyllan?

20 böcker till vänster om den tjockaste boken.

22 böcker till höger om den tunnaste boken.

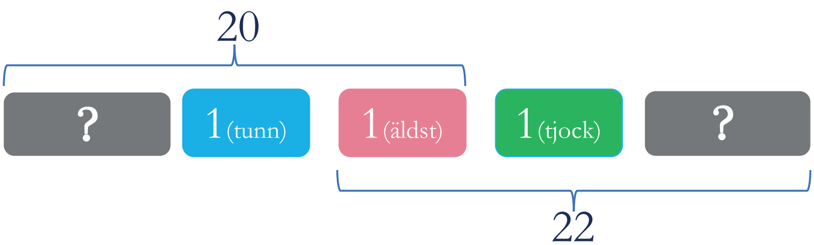


Både den tjockaste boken och den tunnaste boken står bredvid den äldsta boken. Det finns två olika utfall:

För utfall 1 ställs böckerna så här:

Totalt är det 20 + 1 + 1 + 1 + 22 = 45 böcker på hyllan.

För utfall 2 ställs böckerna så här:



Här finns det två sätt att räkna ut antalet böcker på hyllan. Båda uträkningarna ger svaret 41 som är *det minsta antalet böcker på hyllan*.

1. Enligt *det står 20 böcker till vänster om den tjockaste boken*, kan vi räkna ut att det står 20 – 1 – 1 = 18 böcker till vänster om den tunnaste boken. Enligt *22 böcker till höger om den tunnaste boken* kan vi räkna ut att det står 22 – 1 – 1 = 20 böcker till höger om den tjockaste boken. Totalt är det 18 + 1 + 1 + 1 + 20 = 41 böcker på hyllan.
2. Det här fallet kan också räknas som ett staplingsproblem, där den äldsta boken är inkluderad både i de *20 böcker till vänster om den tjockaste boken* och de *22 böcker till höger om den tunnaste boken*. Därför blir det totala antalet böcker 20 + 22 – 1 = 41.

Huvud- och benproblem

En kyckling och en kanin har ett huvud var men olika antal ben. När vi vet summan av antalet huvuden och summan av antalet ben, kan vi räkna ut hur många kycklingar respektive kaniner det finns. Sådana problem kan kategoriseras som huvud- och benproblem som kan lösas på flera olika sätt. Självklart behöver inte alla huvud- och benproblem nödvändigtvis handla om kycklingar och kaniner eller ens om andra djur.

Uppgift 15 i Ecolier 2014 är väl anpassad för att visualiseras med hjälp av rutor. I uppgiften kan varje dag under veckan räknas som ”huvud” och vad Bobby ätit varje dag kan ses som ”ben”.

Kaninen Bobby tycker mycket om kålrötter och morötter. Varje dag äter han antingen

9 morötter

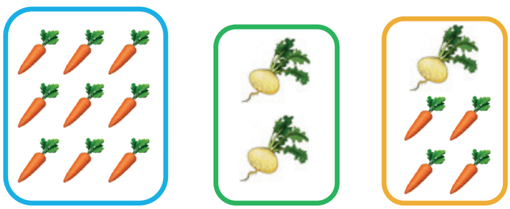
eller 2 kålrötter

eller 1 kålrot och 4 morötter.

Förra veckan åt Bobby 30 morötter.

Hur många kålrötter åt han under veckan?

De väsentliga villkoren från uppgiften kan sammanfattas och visualiseras som i figuren nedan. Eftersom det är antalet konsumerade kålrötter under veckan som ska räknas, behöver vi veta vad Bobby ätit varje dag under veckan. Sju rutor skapas för att representera varje dag under veckan (huvud).

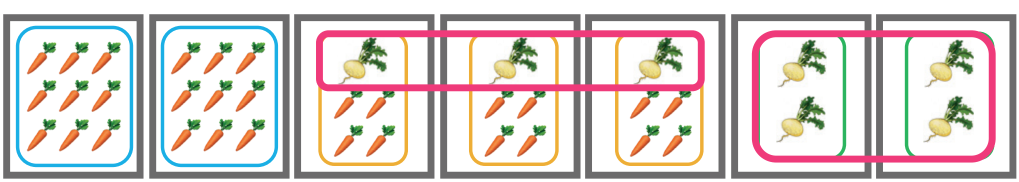


9 morötter *2 kålrötter* *1 kålrot och 4 morötter*

Eftersom Bobby åt 30 morötter förra veckan kan vi vara säker på att antalet dagar Bobby ätit 9 morötter måste vara ett jämnt tal. För om det var udda dagar med 9 morötter, blev summan av antalet konsumerade morötter under en vecka alltid ett udda tal, oavsett hur många dagar med (1 kålrot och) 4 morötter Bobby ätit. Men detta motsäger hela veckans konsumtion på 30 morötter, vilket är ett jämnt tal.

Vidare kan antalet dagar med 9 morötter högst vara två eftersom fyra dagar med 9 morötter per dag är 36 morötter, vilket är fler än 30 morötter. Sedan kan vi testa med ingen respektive två dagar med 9 morötter.

Ingen dag med 9 morötter per dag. Det blir maximalt 28 morötter, alltså inte 30.



Två dagar med 9 morötter per dag. Det innebär att Bobby måste äta $30-18=12$ morötter totalt under resten av veckan. Det blir tre dagar med 4 morötter per dag och sedan två dagar med bara kålrötter. Totalt $3+4=7$ kålrötter.

En liknande exempel är uppgift 14 i Ecolier 2010. Här kan fem gånger på onsdagen anses som "huvud" och bilar eller bussar representerar "ben".

> En färja går över floden. Den tar antingen 10 bilar eller 6 bussar åt gången. På onsdagen gick färjan över floden 5 gånger. Varje gång var den fullastad. Den tog totalt 42 fordon.
>
> Hur många av dem var bilar?

Sträckor

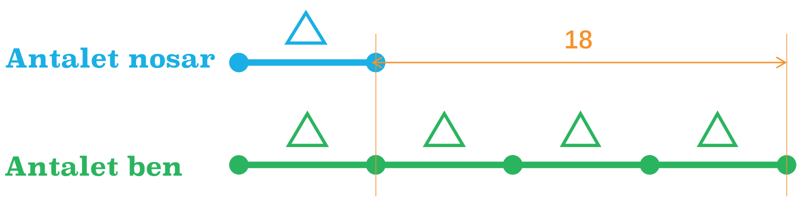
Sträckor kan upplevas som mer abstrakta än både pilar och rutor, och används ofta för att visualisera *relationer mellan kvantiteter*. Vi känner igen den omfattande användningen av sträckor i distans- och hastighetsproblem i fysiken, men det passar också bra för exempelvis differens- och kvotproblem samt längdjämförelseproblem.

Differens- och kvotproblem

Uppgift 17 i Ecolier 2016 handlar också om huvuden och ben. Men den är inte ett huvud- och benproblem eftersom uppgiften handlar om endast ett objekt, hundar, och inte flera olika objekt som i tidigare huvud- och benproblem. När vi i en uppgift vet differensen mellan två kvantiteter och samtidig kvoten mellan dem, kan uppgiften kategoriseras som ett differens- och kvotproblem. Sådana uppgifter kan lätt visualiseras med sträckor.

> Mina hundar har tillsammans 18 fler ben än nosar.
>
> Hur många hundar har jag?

I uppgiften får vi veta att differensen mellan antalet ben och antalet nosar hos hundarna är 18, samt att för varje hund är kvoten mellan antalet ben och nos 4:1 eftersom varje hund har fyra ben och en nos. Då kan uppgiften visualiseras:



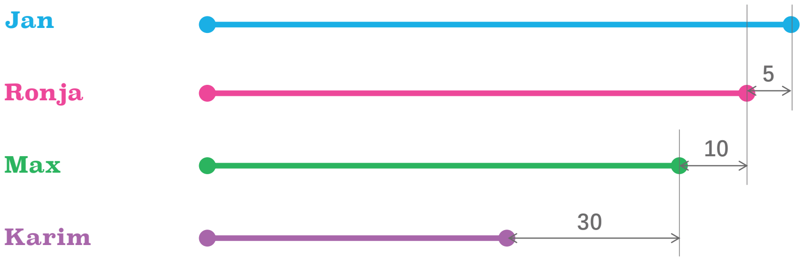
Antalet hundar är lika med antalet nosar. Vi kan se från bilden att differensen mellan antalet ben och antalet nosar på 18 som anges i uppgiften motsvarar exakt tre mängder om alla mängder är lika stora. Då får vi att antalet hundar som motsvarar en mängd måste vara $18/3 = 6$.

Längdjämförelseproblem

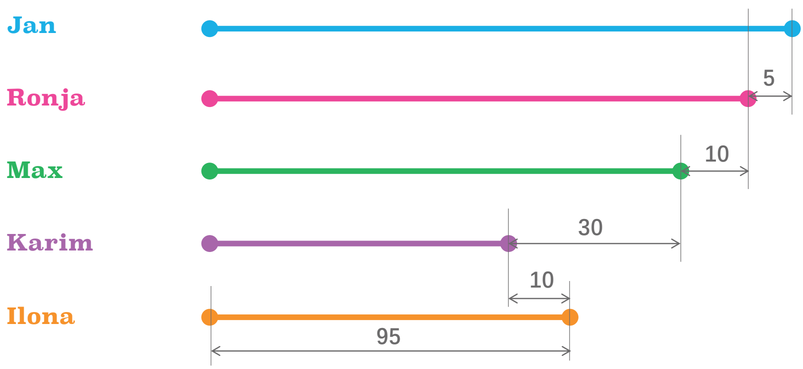
När en uppgift anger differenserna av längd mellan olika objekt, kan uppgiften kallas för längdjämförelseproblem. Uppgift 18 i Ecolier 2017 är ett sådant problem.

> Max, Ronja, Karim, Jan och Ilona stickade halsdukar. Jans halsduk blev längst. Den är 5 cm längre än Ronjas. Karims halsduk blev 10 cm kortare än Ilonas halsduk, som är exakt 95 cm. Max stickade så att hans halsduk blev 30 cm längre än Karims men 10 cm kortare än Ronjas.
>
> Hur lång är Jans halsduk?

Jans halsduk är *5 cm längre* än Ronjas och Max halsduk är *10 cm kortare* än Ronjas. Dessa relationer kan visualiseras så här, där sträckorna inte motsvarar de exakta längderna, men där skillnaden mellan längderna markeras. Max stickade så att hans halsduk blev 30 cm längre än Karims. Denna relation innebär att Karins halsduk är *30 cm kortare* än Max halsduk, vilket visualiseras med en kortare sträcka.



Till sist kan vi rita Ilonas halsduk som enligt informationen är längre än Karims halsduk som blev blev 10 cm kortare än Ilonas halsduk, som är exakt 95 cm:



Från bilden kan vi räkna ut att Jans halsduk är $5 + 10 + (30 - 10) = 35$ cm längre än Ilonas halsduk. Då blir längden på Jans halsduk $95 + 35 = 130$ cm.

Sammanfattning

I den här artikeln använder jag känguruuppgifter för att visa olika typer av material och tre problemlösande visualiseringsverktyg som kan bli tankeverktyg: pilar, rutor och sträckor. Jag hoppas att elever och lärare kan ägna mer uppmärksamhet åt att förbättra förmågor som textförståelse och inre mentala bilder genom förståelsen av dessa material och verktyg. Naturligtvis finns det fler frågetyper och verktyg som är lämpliga för visualisering än de som nämns i artikeln.

LITTERATUR OCH LÄNK

Nilsson, Å. & Sköldvinge, R. (2020). *Kängurusidan*. Nämnaren 2020:3.
Allt om Kängurun finns på ncm.gu.se/kanguru.