

Komplexa jämna kvadrater

Vad sjutton gör studenterna? Jag sitter och rättar tentor och ser hur studenterna har försökt lösa den komplexa ekvationen $z^2 = \frac{3}{4} + i$. Många skriver $z = \pm\sqrt{\frac{3}{4} + i}$ och tappar då genast poäng, för man bör inte skriva rötter av komplexa tal. Men sedan lyckas flera ändå med att räkna ut att $\frac{3}{4} + i = (\frac{2+i}{2})^2$ med någon sorts kvadratkomplettering som jag inte sett förut. Och de får fram rätt svar. Vad pågår? Jag kunde inte släppa det!

Ut på komplexa talplanet

Talen 1, 4, 9, 16, 25, 36 och så vidare kallas som bekant de jämna kvadraterna, helt enkelt för de är kvadrater av heltal: $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$... Det betyder att även 0 är en jämn kvadrat, eftersom $0=0^2$ och 0 är ett heltal. Annorlunda sagt: $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$ och så vidare är heltal, men tyvärr inte till exempelvis $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ och $\sqrt{5}$.

Samma idé kan vi undersöka för komplexa tal. De har som bekant det speciella talet i (i elektronik ibland betecknat med j) med egenskapen $i^2 = -1$. Man kan utan att tveka räkna vidare här som vanligt, och använda $i^2 = -1$ när i^2 dyker upp, eftersom alla räknelagar för reella tal gäller även för de komplexa. Förutom en räkneregel: olikheter fungerar inte. Uttryck som $3i > 1 + i$ är helt meningslösa, de betyder ingenting (däremot är $|3i| > |1 + i|$ meningsfullt och dessutom sant, eftersom både $|3i|$ och $|1 + i|$ är reella tal).

Så låt oss utvidga heltalen till komplexa heltal, alltså tal som $1 + i$ och $3 - 4i$. De kallas Gaussiska heltal, vilket innebär att de är tal $a + bi$ där både a och b är heltal. Man kan sätta ut dem som alla heltalspunkter i komplexa talplanet.

Så, vilka tal är kvadrater på Gaussiska heltal? De är våra komplexa jämna kvadrater. Finns det många sådana? Var finns de?

Tar vi $(1 + i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$ som exempel betyder det att $2i$ är en komplex jämn kvadrat, eftersom det är kvadraten av det Gaussiska heltalet $1 + i$. Då är faktiskt även -1 , -4 , -9 och -16 komplexa jämna kvadrater, ty de är kvadraterna av i , $2i$, $3i$ och $4i$. Generellt uttryckt: kvadraterna av $n(1 + i)$ ger de jämna kvadraterna $2n^2i$.

Genväg för många andragradsekvationer

Detta gör det lättare att lösa en andragradsekvation med komplexa tal.

Ekvationen: $z^2 = 2i$
kan vi nu lösa genom att skriva $2i$ som en kvadrat: $z^2 = (1 + i)^2$
som ger direkt: $z = \pm(1 + i)$.

Vi fick båda lösningarna genast genom att vi visste att $2i$ är en jämn kvadrat. Kan man alltid göra så här? Ja, om högerledet är en jämn kvadrat! Och de jämna kvadraterna är faktiskt inte svåra att känna igen.

Pythagoreiska trippler

För vårt fortsatta resonemang kommer vi att ha användning av de så kallade pythagoreiska tripplarna. De är heltalslösningar till Pythagoras sats och kan därför ritas som rätvinkliga trianglar. Det enklaste exemplet är 3, 4, 5, som ibland kallas för en egyptisk triangel. Det är en pythagoreisk trippel eftersom $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, som är lika med 5^2 . På samma sätt är även 6, 8, 10 och 9, 12, 15 och 30, 40, 50 och 300, 400, 500 pythagoreiska tripplar.

Här har vi en serie, alla multipler av 3, 4, 5. Och det finns fler, nästa är 5, 12, 13 och alla multipler av dem. Man kallar ofta 3, 4, 5 och 5, 12, 13 för primitiva eftersom de inte är multipler av någon annan trippel.

Samtliga pythagoreiska tripplar går att skriva med hjälp av två heltal m och n där vi antar att $m > n$. De pythagoreiska tripplarna är då talen $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ och deras multipler.

Vi kan se att $m = 2, n = 1$ ger trippeln 3, 4, 5, den egyptiska trippeln (eller triangeln). Det är också lätt att kontrollera att $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ uppfyller Pythagoras sats.

Tillbaka till de komplexa jämna kvadraterna

Kvadraten av $a + bi$ är förstås $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, så de komplexa jämna kvadraterna är talen $a^2 - b^2 + 2abi$ för alla heltal a och b . Här finns en ganska stor likhet mellan uttrycken $a^2 - b^2 + 2abi$ och $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$. Har vi kanske en komplex jämn kvadrat om real- och imaginärdelarna är de två första talen i en pythagoreisk trippel? Låt oss kalla ett sådant par; $m^2 - n^2, 2mn$, för ett pythagoreiskt par.

Nja, det stämmer inte riktigt med vår jämn kvadrat $2i = (1 + i)^2$. Men det beror bara på att vi behöver tillåta 0. Talet 0 fungerar inte för trianglar, för om en sida har längd 0 är det inte någon riktig triangel. Men 0, 2, 2 är ändå onekligen en trippel som uppfyller Pythagoras sats: $0^2 + 2^2 = 2^2$.

Låt oss tillåta $m = n$, och utvidga de pythagoreiska tripplarna också med $0, 2n^2, 2n^2$ där n är ett heltal. Då är också $0, 2n^2$ ett pythagoreiskt par.

Ännu en utvidgning av våra pythagoreiska par är att tillåta negativa tal, som är förbjudet för en triangelns sida. Om $x + iy$ är en komplex jämn kvadrat är nämligen även $x - iy, -x + iy$ och $-x - iy$ komplexa jämna kvadrater. Om $x + iy = (a + ib)^2$ gäller att $x - iy = (-a + ib)^2, -x + iy = (b + ia)^2$ och $-x - iy = (b - ia)^2$, så vi behöver inte bekymra oss över tecknen när vi letar pythagoreiska par. Det betyder att ett pythagoreiskt par $m^2 - n^2, 2mn$, där m och n är heltal, gärna noll eller negativa, svarar precis mot en komplex jämn kvadrat $m^2 - n^2 + 2mni$.

Trippeln 5, 12, 13 ger på samma sätt de jämna kvadraterna $5 + 12i, -5 + 12i, 5 - 12i$ och $-5 - 12i$, eftersom $5 + 12i = (4 + 3i)^2$. Trippeln 15, 8, 17 ger de fyra jämna kvadraterna $\pm 15 \pm 8i$.

Kedjor av komplexa jämna kvadrater

Om vi vill kan vi också, i likhet med pythagoreiska tripplar, kalla en komplex jämn kvadrat $a + bi$ för primitiv om den inte är en multipel av någon annan komplex jämn kvadrat. Multiplerna är $p^2(a + bi)$ för $p = 1, 2, 3 \dots$ eftersom faktorerna måste vara jämna kvadrater.

Notera att om $a + bi$ är en jämn kvadrat så är $b + ai$ i allmänhet inte någon jämn kvadrat. Men $2b + 2ai$ är det faktiskt! Som alltså svarar mot en multipel av samma pythagoreiska par, men där a och b är omkastade. För om $b + ai = m^2 - n^2 + 2mni$, så kan vi även skriva $2b + 2ai$ på samma sätt, men med andra heltal:

$$\begin{aligned} 2(b + ai) &= 4mn + 2(m^2 - n^2)i \\ &= 4mn + 2(m + n)(m - n)i \end{aligned}$$

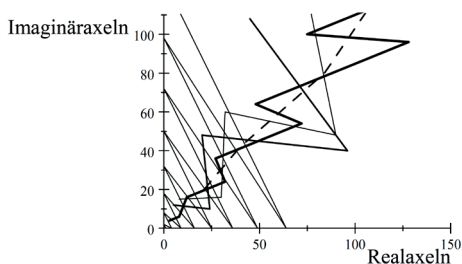
$$\{\text{sätt } k = m + n, l = m - n\} = (2m)(2n) + 2(m + n)(m - n)i$$

$$\begin{aligned} \{\text{alltså } 2m = k + l, 2n = k - l\} &= (k + l)(k - l) + 2kli \\ &= k^2 - l^2 + 2kli \end{aligned}$$

där k och l är heltal. Om a, b är ett pythagoreiskt par, så är alltså även $2b, 2a$ det.

Vi kan kalla $2b + 2ai$ en pseudo-multipel av $a + bi$. Exempel: $8 + 6i$ är en pseudo-multipel av $3 + 4i$. Så för varje pythagoreiskt par a, b finns det en gren som består av alla dess komplexa jämna kvadrater, multipler och pseudo-multiplier. Det är en sick-sacklinje från origo ut i oändligheten. Början av en sådan gren blir så här om vi räknar upp dem med varannan multipel och varannan pseudo-multipel:

$$a + bi, 2(b + ai), 4(a + bi), 8(b + ai), 9(a + bi), 18(b + ai), 16(a + bi) \dots$$



Början av fem grenar av jämna kvadrater:

1, 0 (tunn)

3, 4 (fet)

5, 12 (normal)

8, 15 (tunn)

21, 20 (streckad)

Det är alltså talen $p^2(a + bi)$ och $2p^2(b + ai)$ för $p = 1, 2, 3 \dots$

Generella komplexa kvadratrötter

Rent generellt har vi:

$$x + iy = \left(\pm \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + x}{2}} + i \cdot \text{sign}(y) \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2}} \right) \right)^2$$

där $\text{sign}(y)$ är tecknet på y , det vill säga $+1$ om $y > 0$ och -1 om $y < 0$. Då är $y = \text{sign}(y) |y|$. Denna formeln men finns till exempel på Wikipedia. Man kan testa den genom att sätta in exempelvis $y = 0$ eller $x = 0$. Eller genom att kvadrera och räkna på. Man kan givetvis alltid lösa en andragradsekvation med denna formel, om man vill.

Nu kan vi notera att om x, y är ett pythagoreiskt par så är förstås $\sqrt{x^2 + y^2}$ ett heltal. Då bildar $x, y, \sqrt{x^2 + y^2}$ en pythagoreisk trippel. Om man tittar på formeln

så måste då även $(\sqrt{x^2+y^2}+x)/2$ och $(\sqrt{x^2+y^2}-x)/2$ vara jämna kvadrater för att $x+iy$ ska vara en komplex jämn kvadrat. Men kan vi veta det?

Jodåm för en pythagoreisk trippel kan skrivas $m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2$. Och då är:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} = \frac{m^2-n^2+m^2+n^2}{2} = \frac{2m^2}{2} \text{ som är en jämn kvadrat!}$$

Och $(\sqrt{x^2+y^2}-x)/2 = n^2$. Röttterna ur ett komplext tal m^2-n^2+2mni är således $m+ni$ och $-m-ni$. Förstås.

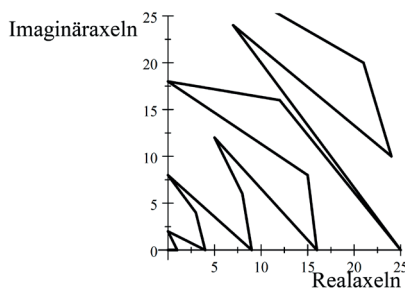
Den jämna kvadraten $-7+24i$ är hyperkvadratisk. Dess avstånd till origo är nämligen 25, som också är en jämn kvadrat! Det inträffar när m, n är ett pythagoreiskt par, till exempel 3, 4, som ger $-7+24i$.

De jämna kvadraterna placering i komplexa talplanet

För 1, 4, 9, 16 ... blir det allt längre från en jämn kvadrat till nästa. Ligger de komplexa jämna kvadraterna också allt glesare när vi kommer längre från origo? De jämna kvadraterna i första kvadranten, uppräknat med växande avstånd från origo, börjar så här:

0, 1, 2i, 4, 3+4i, 8i, 9, 8+6i, 5+12i, 16, 15+8i, 18i, 12+16i
0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20

Nedre raden är kvadratens avstånd till origo. De är alla heltal, eftersom detta avstånd är det tredje talet i den pythagoreiska trippeln.



I denna lista är 4, 9 och 16 multipler av 1. Talen 8i och 18i är multipler av 2i men också pseudo-multipler av 1. Talet 12+16i är multipel av 3+4i, och 8+6i är dess pseudo-multipel. Alla övriga är primitiva. Alla äkta multipler $p^2(a+bi)$ för $p=1, 2, 3...$ ligger på samma räta linje genom origo.

Det enda undantaget här är 0, som ligger på samma räta linje som 4, 9, 16 och 2i, 8i, 18i utan att vara

multipel. För multiplikation förblir 0, additionens neutrala element, ett problem barn. Det är ett undantag inte bara för division.

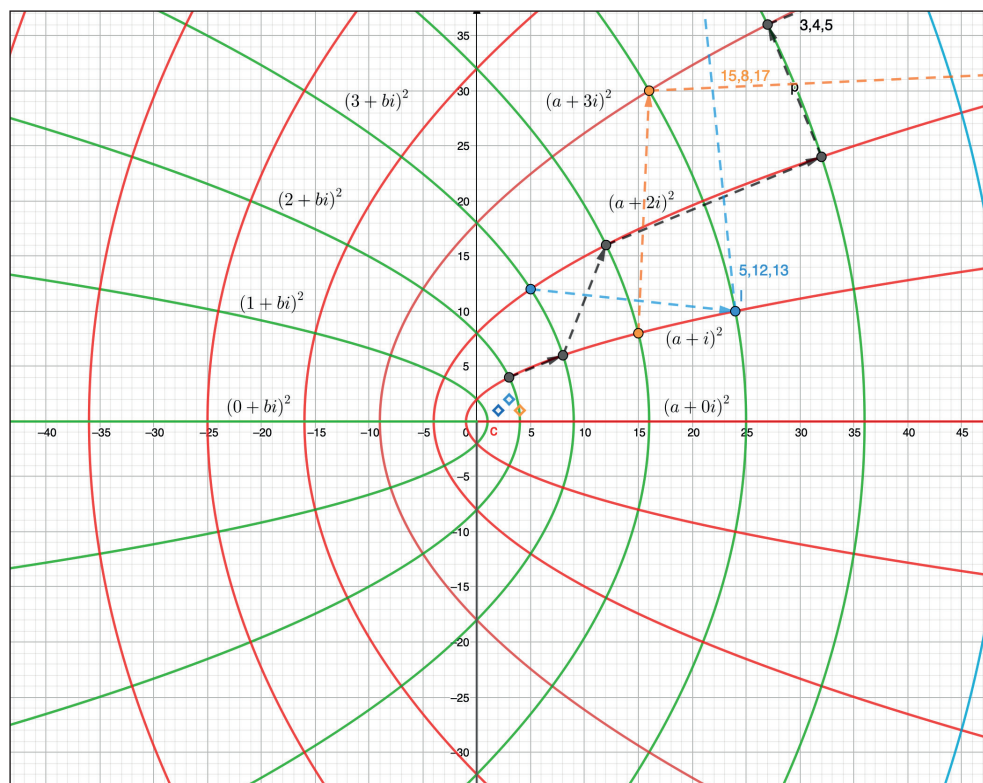
Gauss cirkelproblem är problemet att räkna ut antalet heltalspunkter som ligger innanför en cirkel med centrum i origo och radie r . Eftersom man kan para ihop varje heltalspunkt med en ruta som har area 1, bör antalet heltalspunkter ungefär vara cirkelns area; πr^2 (Gauss bevisade att felet i denna uppskattning inte kan vara större än $2\sqrt{2}\pi r$).

Eftersom det bara är heltalspunkter inom en cirkel med radie $\sqrt{r}$ som har kvadrat med radie högst r , har vi ungefär $\pi(\sqrt{r})^2 = \pi r$ komplexa jämna kvadrater innanför en cirkel med radie r . Det betyder att deras täthet, antalet dividerat med arean i en sådan cirkel, är ungefär $1/r$. Ju större cirkel, desto glesare. Detsamma gäller för jämna kvadrater på tallinjen.

Var finns dessa komplexa kvadrater?

De jämna komplexa kvadraterna visar sig ligga lite gesare på imaginäraxeln ($2i$, $8i$, $18i \dots$) än på realaxeln (1 , 4 , $9 \dots$). Det finns också ett mer analytiskt sätt att hitta dem. Eftersom $x = a^2 - b^2$ och $y = 2ab$, för alla heltal a och b , så kan vi beskriva ännu tydligare var kvadraterna är. Om vi betraktar b som en konstant och löser ut y som funktion av x ur dessa ekvationer, får vi $y^2 = 4a^2(x + a^2)$. För varje heltal a har vi en parabel. För $a = 1, 2, 3$ är det $y^2 = 4(x + 1)$, $y^2 = 16(x + 4)$, $y^2 = 36(x + 9)$. På dessa linjer måste de jämna kvadraterna ligga.

Tänker vi på a som konstant och gör samma sak får vi $y^2 = 4b^2(b^2 - x)$. De komplexa kvadraterna ligger på båda parablerna. Alltså i parablernas skärningspunkter. Eftersom en parabel $y^2 = A(x - B)$ har sin fokuspunkt i $(B + A/4, 0)$ betyder det faktiskt att origo är fokuspunkten för samtliga parabler i figuren!



Rationella komplexa jämna kvadrater

Så vi är på jakt efter pythagoreiska par. Är $\frac{3}{4} + i$ en jämn kvadrat? Förlänger vi så får vi $\frac{3}{4} + i = \frac{(3+4i)}{4}$, och det pythagoreiska paret 3, 4 dyker upp! Vi såg tidigare att $3 + 4i = (2 + i)^2$, så

$$\frac{3}{4} + i = \frac{3+4i}{4} = \left(\frac{2+i}{2}\right)^2$$

Vi finner ganska lätt med pythagoreiska par att kvadraten på $1 + \frac{1}{2}i$ är $\frac{3}{4} + i$. Men vi måste ju inte begränsa oss till heltal. Eftersom vi alltid kan förlänga med en konjugatkvantitet kan vi alltid ha nämnaren reell som

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1+2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{9-16} = \dots$$

Om nämnaren är en jämn kvadrat och täljaren är en komplex jämn kvadrat har vi en rationell komplex jämn kvadrat. Till exempel är $4+3i, \frac{(4+3i)}{4}, \frac{(4+3i)}{9}, \frac{(4+3i)}{16}$ och så vidare rationella komplexa jämna kvadrater.

Om vi startar med en komplex jämn kvadrat $a+bi$ (exempelvis en primitiv) kan vi säga att alla tal $\frac{p^2}{q^2}(a+bi)$ där p och q är heltal ($q \neq 0$) är rationella komplexa jämna kvadrater. Alla dessa ligger på en rät linje genom origo och $a+bi$. Det är på grund av att förhållandet mellan real- och imaginärdelen är samma för dem alla. I en cirkel med radie r finns det förstås hur många rationella komplexa jämna kvadrater som helst. Vi kan på detta sätt även lösa en del andragradsekvationen som har irrationella lösningar. Ekvationen $z^2 = \frac{3+4i}{2}$ ger ju lösningarna $z = \pm \frac{2+i}{\sqrt{2}}$.

Tillbaka till studenterna

En student hade skrivit en utförlig lösning. Han skrev $\frac{3}{4} + i$ som $\frac{3+4i}{4}$ och sedan med $3+4i = a^2 - b^2 + 2abi$ testar $2ab = 4$. Då kan $a = 2$ och $b = 1$ eller tvärtom. Med $a = 2$ och $b = 1$ blir $a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$. Så $3+4i = (2+i)^2$. En lösning funnen!

Han hittade heltal a och b som uppfyller $2ab = 4$ och kontrollerade om något av dem även stämmer med $a^2 - b^2 = 3$. Det är en metod! Han undersökte om $3+4i$ är en komplex jämn kvadrat.

Olika konventioner för kvadratrötter

Vi matematiker tycker inte om att skriva $\sqrt{2i} = 1+i$ eftersom vi inte vill skriva roten ur ett komplext tal. Varför? Ja, vad borde $\sqrt{2i}$ betyda? Det borde väl vara en lösning till $z^2 = 2i$. Men eftersom $-1-i$ också är en lösning, så kan vi i så fall lika gärna skriva $\sqrt{2i} = -1-i$. Problemet är att $\sqrt{2i}$ inte är entydigt. Vilken av de två avses?

Här är det annorlunda för reella tal. Vi har bestämt att $\sqrt{2} = 1,414\dots$, inte att $\sqrt{2} = -1,414\dots$ Konventionen för reella kvadratrötter är den positiva roten. Det går inte lika lätt att bestämma en sådan konvention för komplexa tal.

Den vanligaste konventionen är nog att $\sqrt{2i}$ betyder båda rötterna, således en helt annan konvention än den för reella tal. Därför behöver man vara försiktig. Enklast är att undvika att skriva roten ur ett komplext tal.

Pq-formelns vetenskaplighet

För övrigt så anser jag att var och en som använt pq-formeln minst 100 gånger bör någon gång ha fått se hur man kan sätta in $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ i uttrycket $x^2 + px + q$, och se att det hela efter en del kalkyl till slut blir noll. Det är viktigt att verkligen testa vetenskapliga sanningar. Annars kan vetenskap inte skiljas från religion.