David Taub

# Djupare matematik med elementära metoder

Genom att tänka lite djupare kring ett till synes ganska enkelt taluppfattningsproblem kan elever redan i årskurs 7 ges möjlighet att föra algebraiska resonemang och utveckla sin förståelse för tal i bråkform.

Det tycks finnas en allmän uppfattning inom matematikundervisning att ”framåt” betyder ”mer avancerade metoder”. När en elev verkar behärska en metod får hen oftast tillgång till en mer avancerad metod. Om hen till exempel behärskar enkla ekvationer får hen kanske lära sig hur man löser andragradsekvationer. Problemet här är ofta att man går från en ytlig behandling av en metod till en annan ytlig behandling av en mer avancerad metod. Man kan då missa chansen att utforska djupare och mer intressanta idéer inom matematiken.

Ett bra exempel dök nyligen upp i en Facebookdiskussion om följande problem från Matematikportalens julkalender för årskurs 7:

$$\frac{A}{4}+\frac{1}{A}=1$$

En lärare ställde frågan hur en elev i sjuan skulle kunna lösa problemet då vederbörande tyckte att det kräver kunskap om andragradsekvationer:

$$\frac{A^2}{4A}+\frac{4}{4A}=1 \qquad \Rightarrow \qquad A^2+4=4A \qquad \Rightarrow \qquad A^2-4A+4=0$$

Man kommer då fram till att $A=2$ är den enda lösningen. De flesta var överens om att idén bakom uppgiften troligtvis bara var att eleverna skulle använda sin taluppfattning eller prova sig fram till ett svar som i detta fall är ganska enkelt att hitta.

Någon poängterade att även om det är lätt att hitta samt visa att $A=2$ är en lösning, är det betydligt svårare att visa att det är den enda lösningen utan kunskap om andragradsekvationer, i synnerhet om vi antar att det inte bara handlar om rationella tal. Men det går alldeles utmärkt att visa detta med bara ”elementära metoder” som en elev i sjuan kan behärska. Det kräver bara lite djupare tänkande. Vi kan börja med en enkel analys som kan vara användbar även för att hitta $A=2$.

- $A<0$ är omöjligt då VL skulle vara negativ
- $A=0$ är omöjligt då man inte kan dela med noll

- $A \leq 1$ är omöjligt då VL skulle vara för stor på grund av andra termen
- $A \geq 4$ är omöjligt då VL skulle vara för stor på grund av första termen.

Med denna enkla analys får man direkt att $1 < A < 4$. Om man vill undersöka heltal först har man bara 2 och 3 att prova. Då hittar man $A = 2$ snabbt och enkelt, byggt på resonemang.

## Elementära metoder

Vad händer om vi tillåter andra typer av tal förutom heltal? Det finns många sådana mellan 1 och 4. Hur kan en elev i sjuan vara säker på att det inte finns andra lösningar? Jag kommer att förklara två snarlika metoder som bara använder grundläggande algebra och goda kunskaper om bråk.

Idén här är att utgå från lösningen $A = 2$. Vi kan då utforska vad som händer om vi börjar ”gå ifrån” vår lösning: vad händer om $A$ börjar bli större (men mindre än 4) och vad händer om $A$ börjar bli mindre (men större än 1)?

Först behöver vi tänka genom vad lösningen $A = 2$ betyder. Problemet blir då:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

Vad händer om vi ökar $A$, så att det är lite större än 2? Då blir första termen på VL lite större och andra termen lite mindre. Om summan fortfarande ska vara lika med 1 måste storleken på denna ändring vara detsamma för både termerna.

Nu kan vi försöka formalisera detta med lite algebra. Det finns två enkla sätt att visa att $A$ blir lite större än 2. Vi visar båda.

### *Öka lite grann*

Först kan man lägga till någonting till 2 och titta på vad som händer om $A = 2 + x$ där $0 < x < 2$. Då har vi ökat $A$ lite grann.

Ändring på första termen: $\frac{2}{4}$ ändras till $\frac{2+x}{4}$. Ökningen är då lika med:

$$\frac{2+x}{4} - \frac{2}{4} = \frac{x}{4}$$

Ändring på andra termen: $\frac{1}{2}$ ändras till $\frac{1}{2+x}$. Minskningen är då lika med:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} = \frac{2+x}{2 \cdot (2+x)} - \frac{2}{2 \cdot (2+x)} = \frac{x}{4+2x}$$

Om summan fortfarande ska vara lika med 1 måste ökningen och minskningen vara lika stora. Men det är lätt att se att $\frac{x}{4} > \frac{x}{4+2x}$ och då kan de inte vara lika. Vi har nu visat att det inte kan finnas några andra lösningar mellan 2 och 4. Samma metod kan användas för $2 - x$ där $0 < x < 1$ och lämnas som en övning till läsaren.

### *Multiplicera med en faktor*

Man kan genomföra en liknande analys genom att multiplicera 2 med en faktor istället för att addera ett tal. Här jämför vi $A=2$ med $A=2k$ där $1<k<2$ som även det ger tal mellan 2 och 4. Vi gör nu exakt samma analys som ovan. Algebran kan delvis betraktas som något enklare i detta fall.

Ändring på första termen: $\frac{2}{4}$ ändras till $\frac{2k}{4}$. Ökningen är då lika med:

$$\frac{2k}{4}-\frac{2}{4}=\frac{k}{2}-\frac{1}{2}=\frac{k-1}{2}$$

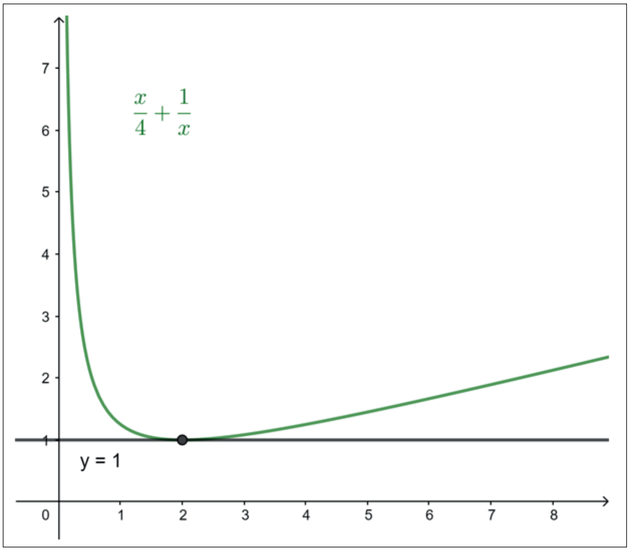
Ändring på andra termen: $\frac{1}{2}$ ändras till $\frac{1}{2k}$. Minskningen är då lika med:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}=\frac{k}{2k}-\frac{1}{2k}=\frac{k-1}{2k}$$

Om summan fortfarande ska vara lika med 1 måste ökningen och minskningen vara lika stora. Men det är lätt att se att $\frac{k-1}{2}>\frac{k-1}{2k}$. Nu har vi ännu en gång visat att det inte kan finnas några andra lösningar mellan 2 och 4. Matematiken och analysen här är egentligen detsamma för $\frac{1}{2}<k<1$ för att visa att det inte finns några lösningar mellan 1 och 2. Här har vi bara använt grundläggande algebra samt idén att hitta en gemensam nämnare för att subtrahera två tal i bråkform. Själva analysen grundas i den enkla idén att en större nämnare betyder ett mindre tal.

## Digitala verktyg

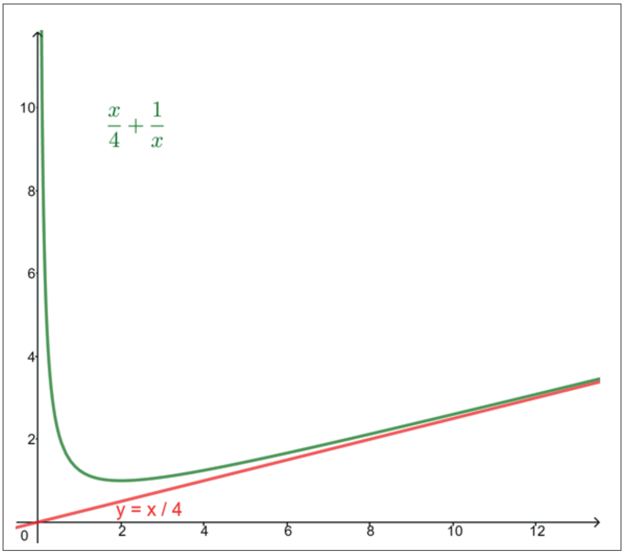
Det finns naturligtvis bra sätt att analysera uppgiften med hjälp av digitala verktyg utan att behöva ta till penna och papper. Geogebra går utmärkt att använda här. Man kan börja med att rita upp $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$ och $y=1$ samt deras skärningspunkter.



I grafen kan man se att det bara finns en lösning. Även om man inte har använt djupare matematik, finns det andra fördelar med att titta på problemet på detta sätt. Man ser att det inte finns några lösningar där summan är mindre än 1 (här tittar vi bara på positiva summor) samt att det finns två lösningar om summan är större än 1.

Här finns utrymme att använda de mer avancerade metoderna som vi undvek tidigare för de eleverna som behärskar dem. Hur ser lösningar ut för andra summor? Finns det andra summor som har heltalslösningar? Rationella lösningar? Hur kan man veta det?

Man kan också använda grafen för att stödja en annan typ av analys. Vad händer när $x$ blir väldigt stor? Eller väldigt nära 0? I det första fallet blir $\frac{x}{4}$ väldigt stort och $\frac{1}{x}$ väldigt litet. Vi kan då tänka att det blir närmare och närmare $y=\frac{x}{4}$. Vi testar:




I grafen ser man att det verkar stämma ganska bra. En liknande analys kan genomföras för $x$ väldigt nära 0.

Med hjälp av digitala verktyg har vi kunnat analysera uppgiften och fortfarande hålla oss till elementära metoder. Vi har också använt dem för att inspirera till en intressant användning av mer avancerade metoder.

## Djupare matematik

Det kan ofta finnas djupare matematik även i till synas enkla uppgifter – om man bara letar efter den. Det kan finnas många fördelar för eleverna att utforska djupare matematik istället för att hasta sig fram till nästa metod. Det är ett bra sätt att förbättra deras resonemangförmåga samt att skapa djupare insikter och förståelse för matematik.