Lasse Berglund

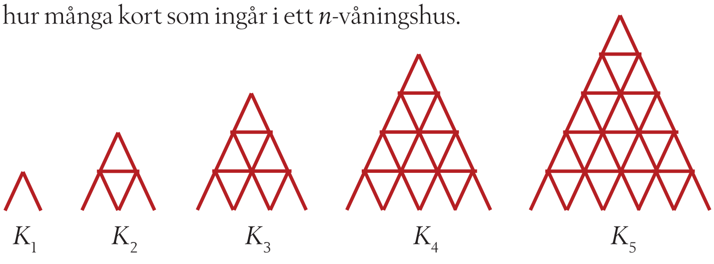
Matematik med en kortlek

En vanlig kortlek kan ge inspiration till många intressanta problem och matematiska upptäckter. Här visar författaren bland annat hur ett enkelt korthus kan vara en ingång till rekursiva mönster, ekvationssystem och matriser, och kopplar dessutom detta till programmering i Python.

En kortlek består av 52 kort i fyra färger: spader, ruter, klöver, hjärter. Förutom att spela med korten, till exempel canasta eller poker, kan man bygga korthus, trolla med dem, sortera och lägga patiens.

Implicita och explicita byggen

Bilden visar ett antal korthus, där det högsta har 5 våningar, och vi frågar oss så klart hur många kort som ingår i ett n-våningshus.



Anlägger vi ett rekursivt perspektiv så ser vi exempelvis att antalet kort i det 4:e korthuset kan skrivas $K_4 = K_3 +$ (nya tillskottet längst ner). Vi får:

$K_4 = K_3 + 2 \cdot 4 + 3$ där termen $2 \cdot 4$ är de åtta korten i botten och termen 3 deras tre takbjälkar.

$K_5 = K_4 + 2 \cdot 5 + 4$

$K_n = K_{n-1} + 2n + (n-1) \quad \Rightarrow \quad K_n = K_{n-1} + 3n - 1$ Basfallet $K_1 = 2$

En väg framåt nu är att skriva ett program för dessa korthus med programspråket Python. Koden blir inte särskilt lång, vilket den sällan blir med rekursion.

Korthus

```
n = int(input(”Ange antal voningar: ”))
def K(n):                                # En funktion för antalet kort, K(n), definieras.
    if n == 1:                           # Med en if-sats anges det viktiga basfallet.
        return 2
    else:
        return K(n – 1) + 3*n – 1        # Rekursionen går igång,
print K(n)                               #   dvs K(n) anropar K(n – 1).
```

```
Ange antal voningar: 229
78776
```

Programmet räknar ut att det behövs 78 776 stycken kort för att bygga ett korthus som består av 229 våningar. Låt oss också göra ett försök att få sambandet på sluten form, det vill säga att få antalet kort K som en explicit funktion av antalet våningar n. Om vi plockar ner de hus vi har och helt enkelt räknar korten, får vi: 2, 7, 15, 26, 40. En lämplig strategi är nu att studera differenser.

$$\begin{array}{ccccccccccl}
2 & & 7 & & 15 & & 26 & & 40 & & \text{Talföljd} \\
 & 5 & & 8 & & 11 & & 14 & & & \text{Differens 1} \\
 & & 3 & & 3 & & 3 & & & & \text{Differens 2}
\end{array}$$

Här visar sig något intressant. Differens 2 är konstant. Det innebär att differens 1 är linjär, och detta i sin tur att talföljden själv är av andra graden, det vill säga den har följande struktur:

$K_n = an^2 + bn + c$ med de tre första värdena: (1;2) (2;7) (3;15)

Ansättningen och de tre punkterna ger oss ett linjärt ekvationssystem.

$$\begin{cases} a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2 \\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 7 \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 15 \end{cases}$$

Med en penna inom räckhåll hade vi slagit oss ner och löst detta system och därmed varit klara. Nu har vi inget annat än en dator till hands och vi överför därför systemet på matrisform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$Ax = y$$

Detta är dock inte nödvändigt. Vi gör det mest för att vi ska känna igen oss i programmeringen nedan, där ett par införda så kallade arrays inte är något annat än dessa matriser.

Linjärt ekvationssystem

```
import numpy as np
A = np.array( [ [1,1,1] , [4,2,1] , [9,3,1] ] )   # En 3x3-matris A etableras som en array.
y = np.array( [2,7,15] )                          # En 3x1-matris y etableras som en array.
x = np.linalg.solve(A,y)                          # En fördefinierad funktion utnyttjas.
print x
```

```
[ 1.5    0.5    0 ]
```

Programmet har löst systemet enligt $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ och koefficienterna är också levererade. Vi har därmed fått våra korthus på sluten form:

$$K_n = 1{,}5n^2 + 0{,}5n$$

För att få en jämförelse, väljer vi samma antal våningar som vi precis har beräknat rekursivt:

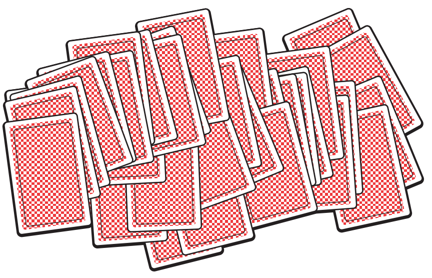
$$K_{229} = 1{,}5 \cdot 229^2 + 0{,}5 \cdot 229 = 78\,776 \text{ stycken kort}$$

En av fördelarna med denna slutna form är så klart att man nu kan vända på frågan: hur högt kan ett korthus bli, om man har tillgång till tre stycken kortlekar? Man hade så klart kunnat utnyttja resultatet från det rekursiva upplägget och därmed direkt se att differensen är linjär.

$$K_n = K_{n-1} + 3n - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad K_n - K_{n-1} = 3n - 1$$

Här kan vi, om vi vill, byta perspektiv och istället betrakta detta rekursiva samband som en ekvation, vilket det också är. Det är en differensekvation, den diskreta matematikens motsvarighet till analysens differentialekvationer, bekanta för våra gymnasieelever. Löser man denna ekvation med bivillkoret $K_1 = 2$, får man samma resultat som i ansättningen ovan, det vill säga $K_n = 1{,}5n^2 + 0{,}5n$.

Att trolla med en kortlek



Då proffsen gör kortkonster för oss, bygger det på fingerfärdighet. Vi amatörer nöjer oss i våra trix med att istället hålla koll och kanske i tysthet räkna på något. Ibland blir det dock så mycket räknande att det blir tråkigt. Några få stänk av matematik räcker, inte mer, för att det ska fungera och kanske överrumpla.

Lisa ska göra ett korttrick för Pelle.

Hon sprider ut alla korten på bordet med baksidan upp.

– Peka på Ruter 7, säger hon.

Pelle pekar på ett av korten som Lisa sedan plockar upp.

– Bra. Nu pekar du på Hjärter Ess.

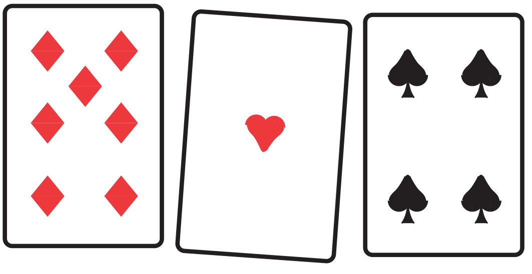
Pelle pekar på ett av korten som sedan Lisa plockar upp.

– Bra. Själv tar jag fram Spader 4, säger Lisa och plockar upp ett kort.

Hon har nu tre kort i handen. Hon lägger fram dem på bordet och läser:

– Ruter 7, Hjärter Ess, Spader 4.

– Det var som sjutton, Lisa!



Steg för steg hur tricket fungerar

1. Lisa kikade i smyg på det understa kortet i leken innan hon spred ut korten. Kortet som hon kikade på var Ruter 7.
2. Det första kort som Pelle pekade på råkade bli Hjärter Ess.
3. I detta läge bad Lisa att Pelle skulle peka på Hjärter Ess.
4. Han pekade och det blev, av en slump, Spader 4.
5. Nu letade Lisa fram det enda kort som hon visste var det låg: Ruter 7, samtidigt som hon påstod att det var Spader 4. Cirkeln var därmed sluten.

Emellanåt har man tur då man gör detta trick. Det lyfter då från denna amatörnivå och blir i världsklass. Vad är det för typ av tur man ska ha?

Lite om sortering

Har man inget annat för sig med kortleken kan man alltid roa sig med lite sortering. För denna uppgift behövs inledningsvis bara en färg; säg Spader.

Vi vill ha dessa 13 spaderkort sorterade så att de kommer i ordning, det vill säga Ess, Tvåa, Trea … Kung efter att vi har lagt ut dem på bordet efter en viss regel. Denna regel är: håll de 13 spaderkorten med baksidan upp i ena handen och vik upp och lägg ut översta kortet på bordet. Det ska då vara Esset. Lägg sedan nästa kort underst i högen. Fortsätt exakt likadant, genom att lägga nästa kort på bordet – det ska då vara Tvåan – och det nästföljande underst i högen och så vidare tills alla korten ligger på bordet. Har man nu sorterat rätt så har korten kommit i ordning. Uppgift: utför sorteringen.

Den korrekta sorteringen är en lustig blandning av ordning och kaos, så frågan är: går detta att generalisera? Upprepa proceduren, nu med både Ruter och Spader, det vill säga 26 kort. Upptäck mönstret som finns mitt i kaos. Upprepa sorteringen med hela kortleken.

Att lägga patiens

Har skicklighet någon betydelse när man spelar ett parti mot kortleken själv, det vill säga när man lägger patiens? I en del patienser finns vissa valmöjligheter, medan man i andra följer spelets regler som en maskin. Är då utgången i dessa patienser given från början, det vill säga är de deterministiska? Med andra ord: är utgången fastlagd av den aktuella blandningen? Och med frågan om blandningar är vi framme vid sista avsnittet.

Kortlekens inre liv

En vanlig kortlek får i princip plats i näven. Måtten i centimeter är: $5\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} \cdot 1{,}5\,\text{cm} = 75\,\text{cm}^3$. Nu till frågan om antal blandningar.

Korten kan så klart blandas runt på en himla massa sätt. Men trots detta överflöd borde man väl klara av att stuva in hela samlingen av blandningar i någon lokal, bara man väljer en tillräckligt stor lokal. Vi nöjer oss därför varken med ett klassrum eller en aula utan vi drar till med Globen i Stockholm.

Det första kortet vi tar kan väljas på 52 olika sätt. Nästa kort vi tar kan då väljas bland de 51 återstående, så två kort kan läggas ut i en tvåmannarad på $52 \cdot 51 = 2\,652$ olika sätt. Med tre kort på rad tillkommer faktorn 50. Med alla korten blir det: $52 \cdot 51 \cdot 50 \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ olika sätt. Detta skrivs 52! och utläses 52 fakultet. Med räknaren får vi:

$52! = 8 \cdot 10^{67}$ stycken blandningar. Den totala volymen blir därmed:

$8 \cdot 10^{67} \cdot 0{,}000075\,\mathrm{m}^3 = 6 \cdot 10^{63}\,\mathrm{m}^3$

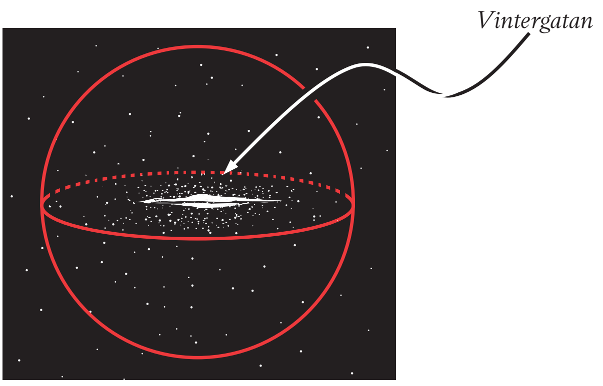
Vi börjar ana storleken. Dessa kort har inte bara sprängt bort väggar och tak i den populära arenan, de har fört oss långt bortom alla tänkbara horisonter. Så hur stort klot krävs egentligen för att rymma alla dessa blandningar?

$4\pi r^3/3 = 6 \cdot 10^{63} \quad \Rightarrow \qquad \text{diametern} = 2r = 2 \cdot 10^{21}\,\mathrm{m}$

Potensformen är ett effektivt sätt att skriva stora tal. Men den kan göra oss fartblinda. Vi tar därför fasta på att 1 ljusår = $9{,}5 \cdot 10^{15}$ m och får klotets diameter:

$2 \cdot 10^{21}/9{,}5 \cdot 10^{15} = 230\,000$ ljusår

Då den galax som vi bebor, Vintergatan, har formen av en diskus med en bredd på 100 000 ljusår, så kommer volymen given av vår kortlek att svälja Vintergatan och allt i dess närhet med hull och hår. Kortlekens inre liv var mer rikt på nyanser än vad vi först kanske trodde.



En kortlek har brett ut sig.