# Procent via prodec

En procent är en hundradel och betecknas med symbolen %. Själva ordet procent kommer från det latinska *per centum* som betyder ”för varje hundrade”. På samma sätt är en promille en tusendel, som betecknas med symbolen ‰. Ordet promille kommer från det latinska *per mille* som betyder ”för varje tusende”.

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad \text{och} \quad 1\,‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

Det fortsätter på samma sätt med en tiotusendel (‱), därefter kommer en miljondel (ppm: som är en förkortning av engelskans parts per million), en miljarddel (ppb: parts per billion) och så vidare.

Däremot finns det inte något motsvarande ord för tiondel. En naturlig kandidat hade varit prodec (eller perdec), eftersom det latinska *per decem* betyder ”för varje tionde”. I denna artikel definierar jag ordet prodec som en tiondel och betecknar den med symbolen $^0\!/$, det vill säga samma symbol som för procent men med en nolla mindre. En anledning till att introducera begreppet prodec är för att procent ofta anges i multiplar av tio (10 %, 20 %, 30 % …) och då är det onödigt att ”släpa runt på” en extra nolla. Vid sådana tillfällen är prodec enklare och mer symbolekonomiskt än procent. Men den huvudsakliga orsaken till att introducera begreppet prodec i denna artikel är att föreslå det som ett pedagogiskt verktyg för att lära sig procent. Det är vanligt att lärarstudenter får lära sig att räkna i andra baser än tio för att få en bättre förståelse för hur elever lär sig positionssystemet. På ett liknande sätt är idén här att elever och lärarstudenter kan få en bättre förståelse för procent om de lär sig räkna med prodec. På så vis blir de inte lika påverkade av vad de vet från förr och de får en bättre förståelse för hur det är att lära sig procent för första gången. Dessutom involveras färre siffror med prodec, vilket gör uträkningarna mindre och fokus hamnar mer på förståelsen av begreppet än på själva uträkningarna.

## Varför procent anses svårt

Procent ses ofta som ett svårt och svårfångat begrepp som används i många olika sammanhang. Delvis tror jag detta är en missuppfattning, där man blandar ihop procent med begrepp som kvot, förhållande, proportion, relativ frekvens, sannolikhet eller rabatt. Matematiskt sett är procent ett väldigt enkelt begrepp, eftersom % bara är en symbol för hundradelar. En stor del av problemet har att göra med hur man ska tolka vad människor menar när de uttrycker saker i termer av procent. Att människor uttrycker sig språkligt oklart när det gäller sådant som involverar procent kan lätt blandas ihop med att procent i sig skulle vara något svårt.

Ett annat exempel på begreppsförvirring är att somliga menar att procent inte bara är ett tal, utan att procent också har en operationell betydelse, som att ”ta en procent av något”, till exempel ”40 % av 60 kr”. Det är begreppsförvirring eftersom man lika gärna kan uttrycka ”40 % av 60 kr” som ”4/10 av 60 kr”. Så det är inte det att procent har en operationell betydelse, utan operationen är att ta en andel av något och procent är bara ett av många sätt att kvantifiera hur stor andelen ska vara. Man kunde även uttrycka andelen som bråk, som decimaltal, som promille eller med prefix, men elever och studenter är vanligtvis mer bekanta med vissa av dessa representationer än andra. Man stöter oftare på uttrycket ”40 % av 60 kr” än ”4/10 av 60 kr”, även om det matematiskt sett betyder samma sak. När man lär elever begrepp som förhållande, proportion, relativ frekvens eller sannolikhet kan det därför vara en bra idé att använda sig av flera olika representationer. I det här sammanhanget kan det vara bra att introducera prodec. Exempelvis kan ”Vad är 30 % av 24?” istället uttryckas som ”Vad är 3°/ av 24?”. En fördel med det är att prodec liknar procent, men utan de automatiska konnotationer som procent har. På så vis kan det vara lättare att identifiera var svårigheterna ligger, om det är i matematiken eller i semantiken.

Här ges några exempel på vanliga missförstånd och svårigheter i samband med procent. Jag analyserar, tolkar och omformulerar problemen så att innebörden i dem blir tydligare och beskriver hur prodec kan användas som ett pedagogiskt verktyg i dessa fall.

## *Addition av andelar*

Om 20 män och 30 kvinnor spelar schack, spelar 50 personer schack. Om däremot 20 % av alla män och 30 % av alla kvinnor spelar schack, då spelar inte 50 % av alla personer schack. För anta att 51 % av alla personer är män och 49 % av alla personer är kvinnor. Då spelar $20\,\% \cdot 51\,\% + 30\,\% \cdot 49\,\% = 24{,}9\,\%$ av alla personer schack. Att använda det nya begreppet prodec i detta sammanhang kan eventuellt hjälpa förståelsen. Säger man att 2°/ av alla män och 3°/ av all kvinnor spelar schack, är det inte säkert att man automatiskt hoppar till slutsatsen 5°/. En del elever och studenter kommer säkerligen fortfarande att göra det, men de ges en chans till eftertanke eftersom prodec är ett obekant begrepp för dem.

## *10 % upp och 10 % ned*

Värdet av en aktie går upp med 10 % och därefter ned med 10 %. Då är värdet av aktien inte oförändrad, utan det är 99 % av dess ursprungliga värde. För somliga är detta ett överraskande resultat. En anledning till det kan vara att problem som involverar procent ofta förefaller ha en additiv struktur, medan de i själva verket har en multiplikativ struktur. Den kortfattade formuleringen av frågan kan också vara en del av svårigheten. Om problemet istället hade varit formulerad på följande vis hade kanske färre blivit överraskade av svaret: Värdet på en aktie går upp med 10 % och därefter ned med 10 % sett till dess nya värde.

Eller ännu tydligare: Värdet på en aktie går upp med 10 %, vilket ger den ett nytt värde. Från det nya värdet går den ned med 10 %. En annan möjlighet vore att undvika procentbegreppet helt och hållet: Värdet på en aktie går upp med en tiondel och därefter ned med en tiondel. Även här kan begreppet prodec ha en fördel eftersom det då inte finns en lika stark förutfattad mening om svaret. En liknande problemställning är: Din lön ökar med 10 % två år i rad. Med hur många procent har din lön ökat? Svaret är inte 20 % som många tror, utan 21 % eftersom lönen efter två år har ändrat sig med faktorn $1{,}1^2 = 1{,}21$.

## *Procent av vad?*

En tröja kostade 500 kr och kostar nu 400 kr. Hur många procents rabatt är det? De flesta har inga problem med att förstå att rabatten är 100 kr, men desto fler är nog osäkra på om det korrekta svaret på frågan är 100/400 = 25 % eller 100/500 = 20 %, det vill säga om de ska dividera rabatten på 100 kr med 400 kr eller med 500 kr. Svårigheter av den här typen har troligen att göra med den språkliga formuleringen av frågan. Logiskt sett inser man att det rätta svaret är 100/500 = 20 % eftersom 20 % av 500 kr är 100 kr, medan 25 % av 500 kr är 125 kr. Man behöver alltså dela rabatten på 100 kr med ursprungspriset 500 kr, inte med det rabatterade priset på 400 kr. Problemställningen är en typisk procentuppgift, vilket kan göra att man känner att man borde kunna lösa den lätt. Genom att formulera den i prodec kan denna impuls dämpas och man ges en extra chans att fundera på vilket pris det är som rabatteras.

## *Knepigt formulerade problem*

Anta att en vattenmelon på 10 kg består av 99 % vatten. Om vatten avdunstar så att vattenmelonen istället består av 98 % vatten, hur mycket väger den då? Det korrekta svaret är 5 kg, vilket nog för många är ett överraskande resultat. Troligvis förväntar de sig att svaret ska vara närmare 10 kg, eftersom den procentuella ändringen är liten. Här har svårigheten inte så mycket att göra med procent i sig, eftersom en ändring från 99 % = 99/100 = 0,99 till 98 % = 98/100 = 0,98 är liten oavsett hur andelarna uttrycks. Om problemet istället varit formulerad på följande vis hade resultat kanske framstått som mindre överraskande: En vattenmelon på 10 kg består till 1 % av annat än vatten. Om vatten avdunstar så att vattenmelonen istället består till 2 % av annat än vatten, hur mycket väger melonen då? Här dubblas procenten och vikten halveras (från 10 kg till 5 kg). Båda ändringarna involverar en faktor 2. Jämför det med procenten som gick från 99 % till 98 %, vilket till talen sett är långt ifrån en halvering. Eftersom problemet inte har så mycket med procent i sig att göra, gör det troligtvis inte så stor skillnad i detta fall om man använder prodec, men man undviker i alla fall oönskade automatiska konnotationer som kommer med procent.

## *Procenttecknet försvinner*

Det finns forskning som visar att en del elever ignorerar procenttecknet i uträkningar (Parker & Leinhardt, 1995). Elever kan behandla procenttecknet som betydelselöst – en symbol som kan tas bort eller läggas till hur som helst, eller tro att procenttecknet kan ersättas med ett decimaltecken på följande inkorrekta vis: 7 % = 0,7 eller 123 % = 0,123. Användning av det för eleverna okända begreppet prodec kan eventuellt få dem att bli mer medvetna om denna missuppfattning.

## *Mer än 100 %*

En del elever har svårigheter med uttryck som är större än 100 %. Eftersom 100 % motsvarar $10\,{}^{0}\!/$ kan prodec kringgå det automatiska obehaget de känner med procent över 100 %.

# Att arbeta med prodec

När lärarstudenter lär sig att räkna i andra baser än tio bör de inte byta till den vanliga basen tio, för då försvinner poängen med själva övningen. På samma sätt bör de heller inte tillåtas byta till procent när de räknar med prodec. Det bästa är att undvika all inblandning av procent för att tvingas lära sig begreppet och dess svårigheter på nytt. Här följer några exempel på uppgifter med prodec som liknar dem som gavs ovanför, med förslag på hur de kan lösas utan att involvera procent:

1. Uttryck $3\,{}^{0}\!/$ som decimaltal och uttryck 2/3 i prodec.

   *Lösning*: $3\,{}^{0}\!/ = \frac{3}{10} = 0{,}3$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot 10\,{}^{0}\!/ = \frac{20}{3}\,{}^{0}\!/ = 6{,}666\ldots\,{}^{0}\!/ \approx 6{,}7\,{}^{0}\!/$

2. Hur många prodec utgör 36 bollar av 45 bollar?

   *Lösning*: $\frac{36}{45} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 8\,{}^{0}\!/$

3. Det är $7\,{}^{0}\!/$ rea på en jacka för 2000 kr. Hur mycket kostar den?

   *Lösning*: $7\,{}^{0}\!/$ av 2000 kr är detsamma som $\frac{7}{10}$ av 2000 kr.
   $\frac{7}{10} \cdot 2000\text{ kr} = 1400\text{ kr}$. Priset på jackan är 2000 kr – 1400 kr = 600 kr.
   Alternativ lösning: $3\,{}^{0}\!/ \cdot 2000\text{ kr} = \frac{3}{10} \cdot 2000\text{ kr} = 600\text{ kr}$.

4. En väska kostade 180 kr, den kostar nu 120 kr. Hur många prodec rabatt är det?

   *Lösning*: Rabatten är 180 kr – 120 kr = 60 kr. Jämfört med det ursprungliga priset är det $\frac{60}{180} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 10\,{}^{0}\!/ = \frac{10}{3}\,{}^{0}\!/ \approx 3{,}3\,{}^{0}\!/$.
   Rabatten på 60 kr utgör alltså $3{,}3\,{}^{0}\!/$ av det ursprungliga priset.

5. Värdet på en bil minskar med en prodec per år.
Hur mycket är bilen värd efter två år?

*Lösning*: Anta att bilens ursprungliga värde är $x$. Efter ett år har bilens värde minskat med $1\,{}^{0}\!/$ av $x$, det vill säga $\frac{1}{10}$ av $x$ som beräknas: $\frac{1}{10}\cdot x$.

Värdet av bilen efter ett år är alltså: $x-\frac{1}{10}\cdot x=\frac{9}{10}\cdot x=9\,{}^{0}\!/\cdot x$.

Efter ett år är värdet på bilen alltså $9\,{}^{0}\!/$ av det ursprungliga värdet. På samma sätt är värdet av bilen efter två år $9\,{}^{0}\!/$ av värdet av bilen efter ett år, det vill säga $9\,{}^{0}\!/$ av $9\,{}^{0}\!/$ av $x$, som är:

$9\,{}^{0}\!/\cdot(9\,{}^{0}\!/\cdot x)=(\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10})\cdot x=\frac{81}{100}\cdot x=\frac{8{,}1}{10}\cdot x=8{,}1\,{}^{0}\!/$ av det ursprungliga värdet.

6. En stek kostar 9 euro inklusive en moms på $2\,{}^{0}\!/$. Hur mycket kostar steken utan moms?

*Lösning*: Beteckna stekens pris utan moms med $x$. Priset inklusive moms är:

$x+2\,{}^{0}\!/\cdot x=x+0{,}2x=1{,}2x$.

Alltså gäller att $1{,}2x=9$ euro $\Leftrightarrow x=\frac{9}{1{,}2}$ euro $=7{,}5$ euro.

Vi har i denna artikel sett exempel på hur man skulle kunna angripa konceptuella svårigheter med begreppet procent genom att använda begreppet prodec. Man använder sig av ett liknande pedagogiskt grepp när lärarstudenter lär sig räkna i andra baser än tio för att få en bättre förståelse för positionssystemet.

Det finns även andra områden som skulle kunna ha nytta av att på ett liknande sätt införa nya representationer. När negativa tal införs kan man använda sig av två olika minustecken, ett som betecknar ett negativt tal och ett annat som används för operationen subtraktion. Bråk och division kan också särskiljas genom olika symboler, vilket är vanligt i vissa länder men ovanligt i Sverige. Att bråkstreck och divisionstecken är samma symbol gör matematiken enklare, enhetligare och mer effektiv, men det ökar samtidigt risken för missförstånd. Det kan alltså ur pedagogisk synvinkel finnas fördelar med att ibland byta representation.

## LITTERATUR


Månsson, A. (2019). *Minus av minus*. Nämnaren 2019:4.

Månsson, A. (2020). B*røk- og divisjonstegn i den norske og svenske grunnskolens lærebøker.* Tangenten, 2020(4).

Månsson, A. (2020). *Räkna i annan bas än tio – utan att fuska*. Nämnaren 2020:1.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A priviliged proportion. *Review of educational research*, 65(4), 421–481.