

# Hur tänkte du?

I denna artikel presenteras resultat från en forskningsstudie som beskriver de svårigheter och möjligheter som matematiklärare på högstadiet och gymnasiet upplevt när de har arbetat med det digitala verktyget Geogebra.

Det har länge funnits en förväntan från samhället att digitala verktyg kommer att skapa bättre förutsättningar för elever att lära sig matematik. Men trots omfattande insatser från olika håll, inte minst från lärare och elever, visar studier att effekter på elevernas lärande har uteblivit.

Undervisning är komplext och digitala verktyg bidrar till denna komplexitet. Det förväntas att lärare på egen hand ska lära sig hantera nya verktyg och förstå hur de kan bidra till undervisningen. Samtidigt ska de skapa nödvändiga anpassningar av uppgifter och arbetsformer så att verktygets potential blir användbar i klassrummet för olika syften. I den politiska debatten är det ofta enbart digitaliseringens fördelar som man talar om, medan svårigheter med att integrera digitala verktyg i matematikundervisning tenderar att starkt underskattas. Kanske är det här vi kan börja förstå varför digital teknik i matematikklassrum inte ger de förväntade resultaten på elevers lärande i matematik.

Geogebra är ett så kallat DGS-verktyg (dynamic geometry system) som bland annat möjliggör dynamisk koppling mellan olika representationsformer. Geogebra har funnits i flera år och används kanske främst inom högsta-diets och gymnasieskolans matematikkurser. För en mer ingående beskrivning av verktyget hänvisas läsaren till [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). I artikeln förklaras några av de svårigheter som kan uppstå när ett DGS-verktyg används.

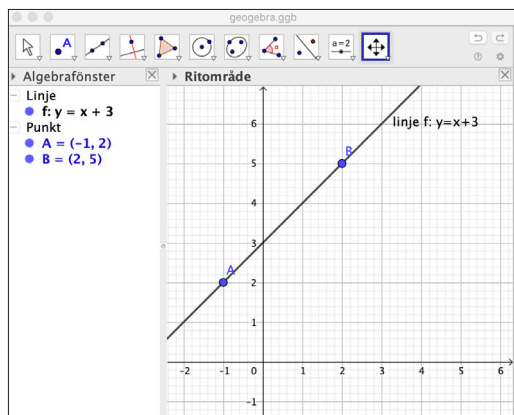
## Förändringar i det didaktiska systemet

Verktyg som Geogebra orsakar förändringar i vad det innebär att göra matematik i grunden, vilket i sin tur kan skapa en situation som lärare inte alltid är beredda på att hantera. Följande uppgift får tjäna som inledande exempel:

Bestäm ekvationen för den räta linjen som går igenom punkterna  $(-1, 2)$  och  $(2, 5)$ . Svara på formen  $y = kx + m$ .

Det finns flera metoder som eleven kan ta till för att lösa den här uppgiften. Traditionella metoder kräver algebraiska omskrivningar för att eleven ska kunna skriva funktionen på formen  $y = kx + m$ . Men om eleverna har tillgång till Geogebra kan de lösa uppgiften med de inbyggda verktyg som finns i programmet. Det eleverna behöver kunna är vilka menyer som kan användas för att låta programmet lösa uppgiften. Att använda algebraiska färdigheter är inte

längre nödvändigt. Exemplet visar hur ett verktyg kan förändra förutsättningarna i en matematisk aktivitet. Naturligtvis är detta något som i sig inte nödvändigtvis är negativt, även om exemplet kan tolkas på det sättet.



Lösningen till uppgiften i Geogebra.

### Praktiskt och epistemologiskt syfte

I själva verket kan det finnas olika syften med en matematisk aktivitet. I vissa situationer spelar det inte så stor roll hur en uppgift blir löst utan det viktiga är att den blir löst. Då kan det vara motiverat att använda alla tillgängliga resurser för att ta fram resultat på ett säkert och effektivt sätt. Med andra ord, ibland är det resultatet i sig som är i fokus eftersom avsikten är att använda resultatet för någon omedelbar nytta. I sådana fall kan man säga att syftet med den matematiska aktiviteten i första hand är av praktisk karaktär. Vi kan därför kalla detta syfte för det *praktiska syftet* med en matematisk aktivitet.

I andra situationer kan svaret vara av sekundär betydelse, vilket inte är samma sak som att det är oviktigt. Det kan till exempel vara en situation där man vill att eleverna ska bekanta sig med en specifik kunskap i form av en teori, eller kanske en metod. I detta fall kan vi säga att syftet med den matematiska aktiviteten är att synliggöra olika aspekter av den kunskap som uppgiften representerar. Resultatet eller svaret på en uppgift kan naturligtvis vara en av de aspekter man är intresserad av men inte den enda. Vi kan kalla detta syfte för det *epistemologiska syftet* med en matematisk aktivitet (från grekiskan episteme som betyder kunskap).

Det ligger ingen värdering i begreppen praktiskt syfte och epistemologiskt syfte men naturligtvis kan lärare göra olika prioriteringar, vilket på olika sätt påverkar elevernas lärande. En rimlig utgångspunkt är att undervisning i matematik behöver ta hänsyn till både det praktiska och det epistemologiska syftet. Inte minst om vi vill skapa möjligheter för eleverna att möta olika dimensioner av ämnet matematik.

Kanske är det så att det epistemologiska syftet (då svaret inte är i fokus) till viss del inryms inom det praktiska syftet när undervisning är baserad på att elever använder papper och penna eftersom läraren normalt har utvecklat sätt att hantera detta i sin undervisning. Men när ett verktyg som Geogebra används behöver läraren göra nya överväganden eftersom programmet kan

förändra den balans som läraren skapat. Plötsligt kanske den uppgift som läraren vanligtvis ger till eleverna inte längre är meningsfull i förhållande till det epistemologiska syftet. Uppgiften ovan är ett exempel där det epistemologiska syftet riskerar att försvinna helt om inte läraren vidtar åtgärder för att balansera upp situationen. Det jag kommer att beskriva och argumentera för är att detta är en utmaning eftersom det är svårt att förutsäga följderna av de förändringar det digitala verktyget medför. Problemet är dock inte nytt, varje nytt verktyg kräver en förändring av de uppgifter eller den matematik som behandlas. På så sätt är inte Geogebra annorlunda än till exempel en miniräknare. De förändringar Geogebra för med sig är däremot mer komplexa och därför svårare att anpassa sig till.

Räcker det inte med att vi förändrar uppgifterna och anpassar dem till Geogebra? Tyvärr är det inte så enkelt. Att göra matematik kan få en annan innebörd när Geogebra används eftersom verktyget tillåter användaren att utforska matematik genom dynamiska och multipla representationsformer. Det innebär att de experimentella och utforskande aspekterna i matematik, som till viss del alltid har funnits där, får en större betydelse och en mer framträdande roll.

I den forskningsstudie som beskrivs här använde lärarna undervisningsmaterial som var speciellt anpassade för att utnyttja de dynamiska egenskaperna i Geogebra. Även om lärarna såg ett stort värde i dessa förändringar hade de svårt för att anpassa sig till den nya situationen. Samtidigt som Geogebra ger nya möjligheter till utforskande arbetssätt är det otroligt effektivt som ett praktiskt verktyg.

### *Från undersökande arbetssätt till "brute-force"*

För att förklara hur Geogebra kan påverka hur elever arbetar med matematik i klassrummet behöver vi ytterligare ett exempel. Vi tänker oss en undervisningssituation där läraren vill att en elev ska fundera och ge förslag på lösningsmetod (epistemologiskt syfte) innan själva arbetet med att lösa uppgiften, till exempel en ekvation, kan starta. Läraren ställer sin fråga till eleven, men istället för att fundera på lämpliga metoder chansar eleven och svarar med vad eleven tror är rätt värde på den obekanta. Läraren talar då om för eleven att svaret är fel. Eleven gör en ny chansning som läraren hanterar på samma sätt. Proceduren fortsätter och för varje omgång blir elevens chansningar bättre och bättre. Till slut svarar eleven rätt och läraren bekräftar detta. Läraren kan antligen pusta ut.

Från början fanns det ett epistemologiskt syfte, det vill säga att få eleven att fundera på möjliga strategier. Men istället använde eleven läraren som ett redskap för att komma fram till det korrekta svaret på det mest effektiva sättet som eleven kände till. Eleven använde en teknik som på engelska benämns "brute-force" som innebär att man genom upprepade försök testar olika möjligheter för att förhoppningsvis hitta en lösning. Att använda läraren på detta sätt är tidskrävande och det är högst tveksamt om läraren hade orkat med hela vägen, men för ett digitalt verktyg finns det inga sådana begränsningar. Geogebra tröttnar inte, tvärtom kan programmet stödja brute-force-tekniker på ett effektivt sätt tack vare dess möjligheter till snabba beräkningar och visualisering. Med andra ord, Geogebra kan förstärka hur elever interagerar med ett matematiskt innehåll på ett icke önskvärt sätt. Vi kan likna detta sätt att

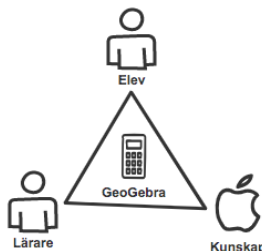
använda Geogebra vid att sitta på ett snabbtåg på väg mot ett slutmål medan det matematiska landskapet utanför passerar förbi utan att resenären har möjlighet uppfatta eller undersöka dess skönhet.

Erfarenheter från studien visar att det finns en risk att eleverna använder Geogebra som ett verktyg för brute-force, något som sällan är meningsfullt utifrån det epistemologiska syftet även om tekniken kan vara mycket användbar ur ett praktiskt syfte. Skillnaderna mellan dessa två olika sätt att involveras i en matematisk aktivitet kan vara mycket små och därför svåra att upptäcka när Geogebra används. Samtidigt har de stor påverkan på vilken matematik som synliggörs för eleverna och på vad de lär sig. I studien kunde vi se hur olika varianter på detta fenomen kunde uppstå vid olika tillfällen och med olika lärare. Dock skedde detta betydligt mer subtilt än i exemplet ovan och passerade därför obemärkt för lärarna.

Det som bidrog till svårigheterna att upptäcka detta fenomen i stunden var att arbetet med Geogebra skapade hög motivation bland eleverna med mycket aktivitet i klassrummet. Eleverna lyckades lösa uppgifterna och lärarna kom initialt att uppfatta undervisningssituationen positivt och lektionen som mer lyckad än vad den i själva verket var.

### *Den didaktiska relationen*

Sammanfattningsvis kan man säga att Geogebra har potentialen att påverka alla delar i den didaktiska relationen (elev, lärare och kunskap) på sätt som är svåra att förutsäga och kontrollera. Till exempel inbjuder Geogebra till ett utforskande arbetssätt samtidigt som verktyget kan trivialisera hur eleverna involveras i den matematiska aktiviteten. Det beror på att det är mer komplext att använda digitala verktyg för ett epistemologiskt syfte än för ett praktiskt syfte. Det som är styrkan hos Geogebra, till exempel beräkningskraft och visualisering, kan därför skapa en allvarlig brist i en undervisningssituation om användningen av programmet inte övervakas och kontrolleras.

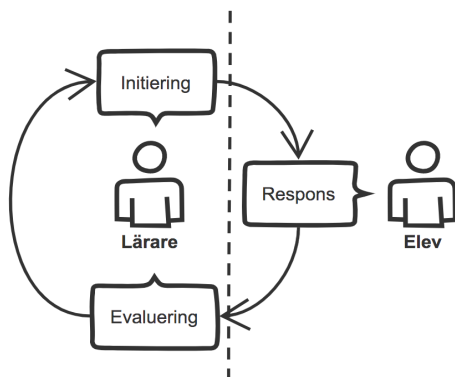


Om det epistemologiska syftet åsidosätts vid något enstaka tillfälle är det inget stort problem. Men om det sker konsekvent kan det leda till sämre möjligheter för eleverna att involveras i processer av matematiskt tänkande som normalt ses som nödvändigt för att utveckla goda kunskaper i matematik. Risken är att undervisningen inte bidrar till bättre lärande i matematik även om eleverna utvecklar goda kunskaper i att använda Geogebra som ett praktiskt verktyg.

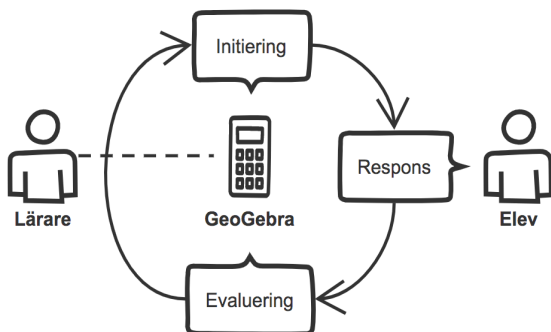
## Direkt och uppskjuten evaluering

I forskningsstudien utvecklades ett ramverk baserat på etablerad forskning för att planera, genomföra och utvärdera undervisning med digitala verktyg. Ramverket hjälpte lärarna att identifiera både önskade och oönskade effekter av att använda Geogebra i undervisningen. Ramverket innehåller flera dimensioner, men i den här artikeln fokuserar vi begreppen *direkt evaluering* och *uppskjuten evaluering* eftersom dessa begrepp visade sig speciellt användbara för att förstå vad som hände under en problemlösningslektion med Geogebra.

Begreppen direkt evaluering och uppskjuten evaluering har sitt ursprung i den så kallade IRE-sekvensen som beskriver ett vanligt interaktionsmönster för undervisning i klassrummet. IRE står för *initiering*, *respons* och *evaluering*. I sin enklaste form kan interaktionsmönstret gå till på följande sätt: läraren ställer en fråga (initiering), en elev svarar (respons) och läraren agerar på elevens svar till exempel genom att bekräfta att eleven har svarat rätt (evaluering).



Ibland kan läraren använda andra strategier i en *utökad* IRE-sekvens. Det sker till exempel när läraren ställer följdfrågor, låtsas inte förstå elevens svar, frågar andra elever, upprepar frågan eller förenklar frågan för att eleverna ska svara rätt. Samma modell kan också beskriva hur digitala verktyg används. Geogebra kan användas på olika sätt både för att presentera en uppgift för eleven och för att evaluera elevens respons.



Evaluering kan antingen vara direkt eller uppskjuten. Handlingar inom IRE-sekvensen som kan sägas tillhöra kategorin *direkt evaluering* är:

- ◆ när frågorna förenklas successivt för eleverna
- ◆ när elevens svar inleder en ny IRE-sekvens
- ◆ när läraren direkt bekräftar vad som är rätt eller fel (kontroll av kunskap).

Evaluering som kan sägas tillhöra kategorin *uppskjuten evaluering* är:

- ◆ när följdfrågorna har karaktären "hur" eller "varför"
- ◆ när elever ombeds utveckla sitt resonemang och beskriva sina tankar
- ◆ när läraren låtsas inte förstå för att eleven ska utveckla sina svar
- ◆ när evaluering av rätt eller fel görs till ett gemensamt ansvar i klassrummet.

En fullständig lista kan av naturliga skäl inte ges. Dessutom kan man inte med säkerhet säga att en viss evaluering alltid ger samma resultat eller samma effekter i ett klassrum.

Det är också viktigt att poängtera att den ena formen av evaluering inte är bättre än den andra. Båda formerna är nödvändiga och det är snarare en eventuell obalans som kan skapa problem. I själva verket kan en överdriven användning av uppskjuten evaluering skapa situationer där mindre viktiga passager i lektionsflödet får alltför stort utrymme på bekostnad av det som är centralt i lektionen.

### *Lärarnas användning av ramverket*

Tanken med ramverket var att utveckla ett gemensamt språk för att diskutera den problemlösningslektion som lärarna genomförde med sina elever. Så småningom visade det sig att lärarna använde sig av begrepp från ramverket även i samband med den ordinarie undervisningen. Ramverket gav dem en ökad medvetenhet om hur de själva brukade agera i klassrummet i förhållande till IRE-sekvensen och gav många tillfällen till diskussion.

Den lektion som lärarna genomförde och sedan analyserade hade i första hand ett epistemologiskt syfte. Geogebra var tänkt som ett stöd i elevernas arbete med att formulera och värdera hypoteser i en problemlösningsprocess. Geogebra skulle användas för "empirisk validering" när väl eleverna hade arbetat fram möjliga strategier för att hitta en lösning. Programmet skulle alltså användas för att kontrollera hypoteser men inte för att lösa problemet. I den givna situationen visade det sig att denna skillnad inte var tillräcklig tydlig. Skillnaden mellan att låta eleverna använda Geogebra för att validera sina förslag till lösningar och att låta dem använda Geogebra för att producera lösningar blev alltför oklar.

Små avvikelser från lektionsplaneringen innebar att eleverna efter ett tag använde Geogebra för att ta fram lösningar, vilket gjorde att syftet med lektionen förändrades. Programmet kom att användas av eleverna i första hand för ett praktiskt syfte, medan det ursprungliga epistemologiska syftet att involvera eleverna i att formulera och värdera hypoteser reducerades kraftigt. Subtila beslut tagna i, så att säga, stundens hetta gjorde att Geogebra gav direkt evaluering i termer av rätt eller fel samtidigt som arbetet för eleverna

förenklades kraftigt. Endast en elev protesterade med att säga att det var "fus-kigt" att använda Geogebra på det sättet.

Lärarna kunde i efterhand, med hjälp ramverket, analysera inspelningar av lektionen och se hur vissa beslut ledde till att Geogebra användes för direkt evaluering. De kunde också själva föreslå hur de skulle kunnat agera annor-lunda i situationen.

## Sammanfattning

Lärare behöver och vill ha tillgång till bra undervisningsexempel med digitala verktyg, men samtidigt visar studien på de svårigheter som finns då lärarna försöker använda färdiga eller halvfärdiga undervisningsexempel. Det visade sig att lärarna hade svårt för att anpassa sina befintliga metoder till den nya (högst krävande) situationen där experimentella och utforskande aspekterna fick en mer framträdande roll. De behövde tid och träning för att kunna ställa om.

Lärarna såg en potential i de förändringar som Geogebra innebar. Till exem-pel att större fokus hamnar på problemlösning, att eleverna själva kan göra matematiska upptäckter och att Geogebra kan öka eleverna intresse och enga-gemang. De svårigheter som måste hanteras är att Geogebra förändrar matema-tiken och gör den mer experimentell, att eleverna lätt engageras endast i brute-force-procedurer och att Geogebra oavsiktligt förenklar uppgiften för eleverna.

Ytterligare en aspekt berör evalueringsfasen. Normalt använder en lärare olika typer av evaluering, både direkt och uppskjuten evaluering. Det gör inte Geogebra. Programmet ställer aldrig på eget initiativ frågan "Hur tänkte du?". Inte heller ber programmet eleven att utveckla ett resonemang eller motivera en lösning. Geogebra ger med andra ord ingen uppskjuten evaluering utan endast direkt evaluering.

## Andra digitala verktyg

Matematikprogram som Desmos, Matlab och WolframAlpha ger alla använda-ren möjligheter till beräkningskraft som är viktigt för ett praktiskt syfte, men som kan vara svårare att använda för ett epistemologiskt syfte. Responssystem som till exempel Socrative, Kahoot och Mentimeter kan användas för att ge snabb evaluering till eleven, men det kan vara värt att tänka över vilken evalu-ering som är lämpligast i den specifika situationen, direkt eller uppskjuten evalu-ering. En annan resurs är matematikuppgifter i olika digitala miljöer som till exempel Khan Academy, matematikappar och spel. På vilket sätt är de desig-nade och vilken typ av evaluering kan de ge eleven? Vad man kan se idag är att många av de digitala verktyg som finns är underutvecklade i denna aspekt. Direkt evaluering tenderar att dominera eftersom detta är lättare att imple-mentera. Än så länge kan inte de digitala verktygen överträffa lärarens förmåga att, vid rätt tillfälle, ställa frågan "Hur tänkte du?".

### LITTERATUR

- Perez, M. (2018). *A teacher-centred design system to integrate digital tech-nologies in secondary mathematics classrooms*. (Doktorsavhandling, Linnéuniversitet, Fakulteten för teknik) Växjö.