Bengt Ulin

Carl Friedrich Gauss

– *en gigant i vetenskapshistorien*

Media berättar emellanåt om särbegåvade barn och ungdomar, speciellt när det gäller matematik. Här handlar det om en alldeles särskilt begåvad elev som efterhand utvecklades till en fullfjädrad matematiker.

Carl Friedrich Gauss föddes 1777 i staden Braunschweig i norra Tyskland. Hans far var ett slags diversearbetare, bl a anlitades han som murare, kanalvakt och trädgårdsmästare. Eftersom han var duktig i räkning var han dessutom kassör i en begravningskassa.

Sju år gammal började Gauss i skolan. Klassen var mycket stor och lär ha haft runt hundra elever. Tre år senare fick de en räkneuppgift: att addera 100 tal i rad. Troligen var det $1+2+3+\ldots+100$. Gauss ställde också upp talen i omvänd ordning, dvs $100+99+98+\ldots+1$ och adderade:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 \end{array}$$

Alla summor blev 101. Det innebar att dubbla summan blev $100\cdot 101$. Hälften av detta tal är $50\cdot 101=5050$, vilket var det svar som den 10-årige Gauss erhöll. Stolt sprang han fram med sin griffeltavla till läraren och sa: ”Där ligger den.”

Som 11-åring påbörjade Gauss sina studier på ett gymnasium i Braunschweig. Matematikläraren fann snart att Gauss var vida överlägsen sina klasskamrater både i matematik och klassiska språk. Hertigen av Braunschweig bekostade Gauss studier i Collegium Carolinum, en skola som kom att bli en teknisk högskola. 1796 gjorde Gauss en vetenskaplig anteckning där han visade en metod att med passare och linjal konstruera en 17-hörning. Gauss skrev:

> *Genom djup begrundan av det aritmetiska sambandet mellan rötterna till ekvationen* $\dfrac{x^p-1}{x-1}=0$ *lyckades jag under en ferie i Braunschweig på morgonen den ifrågavarande dagen (innan jag hade stigit upp ur sängen) se det sökta sambandet med så stor klarhet att jag genast kunde genomföra den speciella tillämpningen på 17-hörningen och bekräfta den med en numerisk beräkning.*

I en anteckning skrev Gauss som matematikstudent i Göttingen att hans upptäckt vore värd ett speciellt intresse. En rad enklare cirkeldelningar var redan kända och han såg fram mot att publicera ”en teori med vidare innehåll som ännu inte är fullt färdig men som skall publiceras så snart den är fullständig”.

Några andra upptäckter

En av Gauss upptäckter gäller triangeltalen, här visade i figurerad form för de tre första triangeltalen 1, 3 och 6.

Gauss fann att varje naturligt tal ≥ 3 kan skrivas som en summa av högst tre triangeltal. Han skrev i sin dagbok den 10 juli 1796: ”Heureka! Num = $\triangle\triangle\triangle$”. I ett brev till en vän skrev Gauss efter att ha brottats länge med problemet:

> *Äntligen, för ett par dagar sedan, lyckades det mig, men inte som resultat av mitt mödosamma sökande, utan bara genom Guds nåd, får jag säga. Som blixten slår ner löste sig gåtan.*

Gauss införde det komplexa talplanet med vågrät x-axel för de reella talen och med lodrät axel för de rent imaginära talen i, $2i$, $3i$ etc. Exempel på komplexa tal är $1+i$, $2+3i$, $4+3i$. I och med införandet av komplexa tal har varje andragradsekvation två rötter, reella eller konjugerat komplexa. Exempelvis har ekvationen $x^2+4x+13=0$ rötterna $-2+3i$ och $-2-3i$. Om vi låter talet 1 representeras av en vågrät sträcka av längd 1 riktad åt höger kan talet i visas som en uppåtriktad lodrät enhetssträcka. Denna kan ses som erhållen genom en vridning 90° moturs av den vågräta sträckan. Ytterligare en vridning 90° moturs, alltså av talet i, ger oss -1 som en sträcka riktad åt vänster vilket överensstämmer med att kvadraten på talet i är -1.

Det är typiskt för Gauss att när han löste ett problem så utformade han lösningen så att den fick en generell räckvidd. Exempelvis kan metoden att addera 100 tal i rad utsträckas till att omfatta summering av vilken aritmetisk serie som helst. Additionen $s=4+7+10+\ldots+103$ kan genomföras genom att vända på talens ordningsföljd och addera de båda följderna, vilket ger summan $2s$, varpå man dividerar med 2.

Åter till konstruktionen av den regelbundna 17-hörningen. Gauss visade med hjälp av komplexa tal att en cirkel kan delas i ett udda antal (p) lika delar om och endast om p är ett primtal av s k Fermat-typ, dvs är av formen $2^{(2^n)}+1$ eller är en produkt av *olika* sådana primtal; n får anta vilka heltalsvärden som helst: $n=0, 1, 2, 3\ldots$ Som ett par kuriositeter kan nämnas:

- ✦ En matematiker vid namn Richelot genomförde konstruktionen av den regelbundna 257-hörningen. Han behövde 294 trycksidor för detta ändamål.
- ✦ En professor Hermes ägnade tio år åt en detaljerad undersökning av 65 537-hörningen, det värde som erhålls för $n=4$. Hans arbete förvaras i en koffert på vinden till matematiska institutionen i Göttingen.

År 1799 promoverades en frånvarande Gauss till fil dr. I avhandlingen bevisas algebrans fundamentalsats: varje algebraisk ekvation $P(x)=0$ har minst 1 rot, säg r. Av detta följer att en ekvation av graden n har n stycken rötter. Man kan nämligen dividera $P(x)$ med faktorn $(x-r)$, varvid man får en ekvation av grad $n-1$. Denna har i sin tur en rot s osv.

År 1801 publicerades Gauss aritmetiska rön i en sedermera berömd bok, *Disquisitiones Arithmeticae* (Aritmetiska undersökningar). Boken studerades ingående av en elev till Gauss, P G L Dirichlet (1805–1859) som höll föreläsningar om bokens innehåll och utvecklade talteorin vidare. Dirichlet bevisade att varje aritmetisk följd a, $a + b$, $a + 2b$ … innehåller oändligt många primtal.
Gauss hade redan som 15-åring ställt upp en hypotes för primtalen: att antalet primtal $\leq n$, säg A(n), anges approximativt av integralen

$$I(n) = \int_2^\infty \frac{dx}{logx}$$

Beviset för denna integral gavs först långt senare av belgaren C J de la Vallée Poussin 1896. Även fransmannen J Hadamard bevisade Gauss hypotes. Båda visade att kvoten A(n)/I(n) går mot 1, då n växer obegränsat.

Astronomi, krökningsmått och elektromagnetisk telegraf

Under nyårsnatten mot 1801 upptäckte astronomen J Piazzi i sin kikare i observatoriet i Palermo en planetoid i stjärnbilden Väduren. Det var förväntat att man skulle finna en himlakropp på det avstånd från solen som Piazzis planetoid befann sig på. Den fick namnet Ceres. När Ceres sex veckor senare inte längre kunde skönjas i kikaren på grund av planetoidens ökade närhet till solen ombads Gauss att spåra Ceres. Till sin hjälp hade han en efemerid för Ceres, dvs en tabell med positionsbestämningar, som fanns upprättad. Gauss gjorde beräkningar som ledde till att man den 7 december 1801 återfann Ceres. Men som det förhöll sig i så många andra avseenden angav Gauss en generell metod, denna gång för att beräkna himlakroppars banor. Han bidrog också till den s k störningsteorin: en kalkyl för bestämning rörande planeternas avvikelse från de klassiska banor som Kepler och Newton hade utforskat.

År 1807 blev Gauss utnämnd till professor i astronomi och till chef för ett observatorium i Göttingen, där han mot slutet av samma år bosatte sig. Till hans berömmelse bidrog även en fördelningskurva i statistik, den s k Gauss-kurvan.

I anknytning till geometriska frågor i astronomin behandlade Gauss frågor beträffande ytor, bl a problemet att utföra lämpliga kartprojektioner över större landområden. Han introducerade en vinkelriktig cylinderprojektion, fördelaktig att utnyttja för områden vars utsträckning går i nord-sydlig riktning.Eftersom cylindern tangerar jordsfären längs storcirkeln genom polerna blir kartan längdriktig längs alla meridianer.

En av Gauss elever, H C Schumacher, hade fått den danska regeringens uppdrag att göra en gradmätning (triangulering) över hela Danmark. Han bad 1816 Gauss om hjälp med planeringen av detta arbete. Dessutom ville Schumacher att Gauss skulle utvidga trianguleringen söderut. År 1816 anslogs medel för en triangulering av Hannover med omgivning. Fem år senare utvidgades trianguleringen i en sådan omfattning att man kunde ansluta gradnätet till det holländska gradnätet och därefter till det franska.

För buktiga ytor introducerade Gauss begreppen krökning och krökningsmått hos en yta. Han nådde värdefulla resultat rörande vinkelriktig avbildning på en annan yta, s k konform avbildning, en grundval för topologin. Gauss genomförde en för honom angelägen undersökning av vinkelsumman i en geodetisk triangel, dvs en triangel vars hörn ligger på jordytan. Med sfären som geometrisk modell för jorden bildas triangelsidorna av storcirkelbågar. Gauss undersökning ledde till en formel för vinkelsumman. Den är alltid större än 180°. Om A, B och C är triangelns vinklar vid hörnen, så blir överskottet över 180° lika med $A + B + C - 180°$. Han ställde upp en formel för detta överskott och där dyker Gauss krökningsmått upp.

År 1816 gjorde Gauss upptäckter som ledde till icke-euklidisk geometri men han publicerade dem inte, ty, som hans skrev i ett brev, "… jag fruktar beoternas skri, om jag skulle uttala min mening". (Red anm: beoter är enligt SAOB dumma, tröga personer.) 1833 blev Gauss berömmelse ännu större genom uppfinningen av den elektromagnetiska telegrafen, gjord i samverkan med Wilhelm Weber. Efter Gauss uppkallades enheten G för magnetisk flödestäthet. Denna enhet är dock sedan länge föråldrad. Den är ersatt med enheten Tesla, T: 1 T = 10 G.

Språkbegåvning

Som nämndes i inledningen så var Gauss mycket språkbegåvad. Han läste ryska och danska, t ex Ludvig Holbergs samlade skrifter på danska. I Gauss bibliotek fanns hela 75 ryska verk, bland dem åtta volymer av Pusjkins verk. Han var förtrogen med forna grekiska och latinska författare och skrev flytande latin i sina skrifter. Bland franska författare läste han Montaigne, Rousseau, Voltaire och Montesquieu. Av verk på de levande utländska språken behärskade Gauss engelskan bäst. Han beundrade Walter Scott, vars verk han uppskattade högt.

Även om Gauss inte spelade något instrument vittnar det om en viss grad av musikalitet att han ett par gånger i februari 1850 besökte en konsertlokal där han hörde vår svenska stjärna Jenny Lind sjunga i Göttingen, Gauss hemstad sedan 1807.

År 1854 drabbades Gauss av hjärtattacker och den 23 februari 1855 gick han ur tiden.

Porträttet av C. F. Gauss är målat av Christian Albrecht Jensen (1792–1870)

LITTERATUR

Hall, T. (1965). *Gauss – matematikernas konung*. Stockholm: Prisma.

Ulin, B. (2002). *Problemlösning i symbios med matematikhistoria*. Solna: Ekelunds förlag.

Unenge, J. (1981–82). *Miniporträttet. Gauss – matematikernas konung.* Nämnaren 1981–82:4.