Tuula Maunula

Priset för tystnad i undervisning

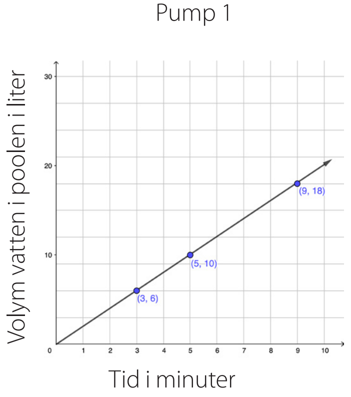
Tuula Maunula har disputerat på en avhandling om elevinteraktion. Hon visar hur viktiga elevers inspel i lektionen är och hur lärandemöjligheterna påverkas av det sätt lärare väljer att bemöta dessa. Lektionerna hon studerat handlade alla om den räta linjens ekvation.

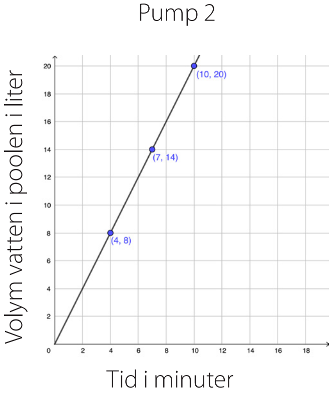
Man kan fundera på vad pedagogisk forskning har att erbjuda lärare i skolan. Vad säger egentligen en avhandling om undervisning som kan vara till nytta för dem som undervisar? Å ena sidan belyser en avhandling alltid bara en liten detalj i allt det komplexa som sker under en lektion. Å andra sidan bygger varje avhandling vidare på tidigare forskning. Ingen börjar från noll, utan forskning bygger kumulativ och sammanlänkad kunskap. Man tar vid där tidigare forskare stannat. Den här texten har som ambition att visa vad min avhandling – både den forskning som den bygger på samt resultaten av min studie – kan erbjuda till dig som undervisar.

I avhandlingen undersökte jag hur tolv lärare hanterade elevers inspel under genomgångar i fjorton olika matematiklektioner, där innehållet i alla lektioner var en introduktion av den räta linjens ekvation. Mina resultat berör olika sätt att hantera elevinspel och vad det får för betydelse för de lärandemöjligheter som erbjuds i de olika lektionerna. För att få direkt inblick i lektionernas innehåll ber jag dig fundera på de båda frågorna i uppgiften nedan.

Två olika simbassänger fylls med vatten med olika pumpar. Graferna visar mängden vatten i varje pool vid olika tidpunkter.

a. Fyller pump 2 bassängen lika snabbt, långsammare eller snabbare än pump 1?
b. Vad tittar du på för att avgöra detta?





Visuell och analytisk syn på lutning

Uppgiften belyser flera dimensioner i min avhandling. Förutom att den illustrerar det innehåll som behandlas under lektionerna visar den även att i en analys bygger man vidare på vad andra kommit fram till. Professor Joanne Lobato i San Diego har skapat uppgiften och använt den i en intervjustudie för att undersöka om elever kan se skillnad på lutning som egenskap hos en linje och lutning som egenskap hos en funktion (som beskrivs med en linje).

I min avhandling behandlas lutning i vissa klassrum ofta som en backe (oftast uppför), vilket riktar uppmärksamheten på räta linjens ekvation som *bild*, medan lutning i andra klassrum behandlas som *förändringstakten* mellan två variabler. Eftersom lutningen i uppgiften ovan i matematisk mening är densamma för båda pumparna trots att den ena "lutar mer", kan uppgiften användas för att skilja en *visuell* från en *analytisk* syn på lutning. Denna distinktion är väl dokumenterad i tidigare matematikdidaktisk forskning och anses utgöra en vattendelare för fortsatta studier i matematik.

Fråga a som handlar om att avgöra pumparnas hastighet är en vanlig typ av fråga i svenska läromedel, men fråga b är av en typ som förekommer mer sällan. Ett av bekymren i svensk matematikundervisning är att innehållet behandlas så att elevernas förståelse snarare blir *procedurell* än *relationell*. Fråga b riktar uppmärksamheten på vad eleven behöver förstå för att förstå linjära funktioner, som att se lutning som en relation mellan två dimensioner. Om man istället för att studera lutningen som bild tittar på relationen mellan koordinaterna i punkterna är det lätt att avgöra att hastigheten är lika i båda graferna. Graderingen av axlarna måste studeras om fokus är på lutningen, men om fokus istället ligger på koordinaternas värden blir axlarnas gradering överflödig information.

Uppgiften har även en variationsteoretiskt vacker design. Två olika uppfattningar av lutning – som backar eller som relationer – samvarierar och lockar läsaren till eftertanke. Om lutning endast ses som en uppförsbacke blir de olika graderingarna av axlarna nödvändiga för att räkna ut hastigheten på pumparna. Att uppfatta koordinaternas relationer är troligen en kritisk aspekt för att snabbt kunna avgöra frågan om pumparnas hastigheter. Dessutom kan uppgiften användas för att synliggöra en vanlig missuppfattning som förekommer frekvent i de lektioner jag studerat, där begreppet lutning relateras till en lodrät axel, som exempelvis en lutande julgran eller det lutande tornet i Pisa. Stor lutning, det vill säga hög pumphastighet i detta fall, är när linjen nästan ligger ner. Med en stående julgran som referenslinje lutar grafen för pump 1 betydligt mer än grafen för pump 2.

Interaktion och innehåll – två aspekter av lektionen

Jag har undersökt två olika aspekter av undervisning. Den första handlar om *hur elevinspel hanteras* och den andra om *hur innehållet behandlas*. Analysen av innehållets behandling visar även vilka lärandemöjligheter som skapas i de olika lektionerna. Båda aspekterna visar i detalj vad som sker under matematikgenomgångar, men slutsatserna i avhandlingen kommer från när de olika resultaten kombineras i en gemensam analys.

Jag ville undersöka lektioner med samma innehåll och valde den räta linjens ekvation av två skäl. Dels var det lätt att avgränsa och kommunicera till lärarna och dels är innehållet relevant i både grundskolan och gymnasiet. Totalt har jag analyserat 14 lektioner i olika klasser, med hälften från grundskolans åk 9 och hälften från gymnasiets olika program. Tolv lärare undervisade och 297 elever från nio olika skolor deltog i någon av de 14 lektionerna. Jag genomförde två mycket detaljerade analyser: en om interaktionen i lektionerna och en om hur innehållet behandlades i varje lektion.

Först följde jag alla drygt 800 elevinspel som förekom i lektionerna. Med elevinspel menar jag alla elevers kommentarer, frågor och svar som förekom under lektionernas helklassundervisning. I analysarbetet ställde jag frågor som: Vad hände med elevernas bidrag till lektionen? Blev de ignorerade eller utforskade? Vilka skillnader fanns mellan lektionerna? Vilka olika sorters elevinspel förekom? Vad bidrog eleverna med genom sina frågor och kommentarer? Sedan genomförde jag variationsteoretiska analyser för att identifiera vilket lärande som erbjöds eleverna. Alltså, hur behandlades t ex lutning eller begreppet funktion i lektionerna? Den mest spännande tiden i den nästan två år långa analysfasen i avhandlingsarbetet – mitt Eureka – var när jag kombinerade dessa båda analyser och såg ett samband mellan hur lärare hanterade elevinspel och vilka lärandemöjligheter som skapades. Men låt oss först titta på varje analys var för sig.

Att hantera elevinspel

Även om undervisning i stor utsträckning fortfarande vilar på tankar om direkt överföring av kunskaper mellan läraren och den lärande, är vi numera medvetna om att relationen mellan undervisning och lärande är mer komplex än så. De flesta lärare vet att det behövs någon form av interaktion mellan elever, lärare och innehåll för att lärande ska ske. Forskningen om interaktion i undervisning har varit omfattande sedan intresset väcktes på 1990-talet. Resultaten visar att den sorts interaktion lärare skapar i sina klassrum beror på många olika faktorer, till exempel på hur läraren ser på lärande. Det verkar dessutom finnas ett samband mellan hur elevinspel i klassrummet hanteras och kvaliteten på de inspel eleverna bjuder på. Interaktion i undervisning tycks ta tid i anspråk. Ett dilemma för lärare är att balansera mellan att använda elevinspel och att samtidigt lyckas ”hinna med kursen”.

En stor del av interaktionsforskningen har fokuserat interaktionen i sig, men min studie är inriktad på att förstå ämnesinnehållet i interaktionen. Alltså, vad finns det för potential i elevinspelen och hur påverkar de lektionens innehåll? En utgångspunkt har varit att det finns ett samband mellan vad elever säger (frågar eller kommenterar) och hur de förstår innehållet som kommuniceras. Man kan se det som att elevinspelen i en lektion är ett fönster till en del av elevernas medvetande. Eller annorlunda uttryckt: elevers inspel kan visa hur de uppfattar innehållet. Förutom att vi lärare behöver förstå att det finns något att höra i elevinspelen behöver vi känna igen och förstå vanliga missuppfattningar för att kunna använda dem. Tidigare forskning om elevinspelens roll i undervisning har visat på vikten av att använda sig av dem, men även på komplexiteten i fråga om *hur* de ska användas och på lärares rädslor att exponera elever samt svårigheter att kunna avväga utforskandet av elevinspel mot lektionens syften.

Hur behandlades då inspel från eleverna under de lektioner jag studerade? Lektionerna var mycket olika. På vissa lektioner hördes nästan enbart lärarens röst, på andra var det läraren och några få av eleverna som pratade, och några lektioner var helt genomsyrade av lärare-elevinteraktion. Samtliga lektioner handlade om introduktion av den räta linjens ekvation, och därmed fanns inga lektioner med i studien som enbart innehöll enskild tyst räkning. Den första analysen visade att elevinspel behandlades på fyra olika sätt:

- de *ignorerades*
- de *valdes* för att få lektionen att gå framåt
- de *bekräftades*
- de *utforskades*.

Det var framför allt i den sistnämnda kategorin, när elevinspel utforskades, som intressanta lektionssekvenser uppstod. Att utforska ett elevinspel innebär att det matematiska innehållet i elevinspelet görs till undervisningsinnehåll. Ett exempel på detta var när två elever visade på en annan uppfattning av lutning än den gängse. De hade valt en vertikal referenslinje, ungefär som när vi säger att tornet i Pisa lutar mer och mer för varje år som går. Eleverna hade sorterat hur mycket graferna lutade utifrån denna uppfattning. Läraren pausade genomgången och utforskade elevinspelet genom att börja diskutera vad lutning i det här sammanhanget innebär.

Efter den första analysfasen valde jag ut de elevinspel som på något sätt bidrog med något nytt i innehållet. Då försvann många elevinspel som enbart valdes för att få lektionen att gå framåt eftersom de sällan bidrog med annat än det förväntade i innehållet. Utifrån hur elevinspelen utvecklades sorterade jag lektionerna i tre skilda lektionstyper:

1. En dominans av utforskade elevinspel (5 lektioner),
2. En blandning av hur elevinspelen utvecklades (4 lektioner)
3. Inga utforskade elevinspel (5 lektioner).

Tidigare forskning om elevinspel har ofta skiljt på att läraren kan *ignorera dem, bekräfta men inte använda dem* eller *bekräfta och bygga in dem i undervisningen*. Genom uppdelningen i kategorierna *valda, bekräftade* och *utforskade* elevinspel har jag kunnat visa att det kan vara stor skillnad mellan olika sätt att bygga in elevinspel i undervisning.

Att undervisa om lutning

Lutning är en grundläggande begrepp för att beskriva en funktions beteende. Elevers uppfattningar om lutning är i tidigare forskning kartlagda i detalj. I synnerhet gäller detta lutning i den grafiska representationen och kopplingen till riktningskoefficienten i funktionen. Några vanliga missuppfattningar om lutning som tidigare identifierats är: att tolka höjd som lutning, att uppfatta lutning enbart geometriskt som en vinkel, att se lutning som den totala längden av grafen och att se lutning som en fysisk egenskap hos en linje.

En viktig distinktion för fortsatt lärande i matematik är att kunna separera mellan att se lutning *visuellt*, som en egenskap hos linjen, eller *analytiskt* som en egenskap hos funktionen. När lutning uppfattas visuellt uppfattas inte skillnaden mellan linjens lutning (engelska: steepness) och funktionens lutning (engelska: slope). Undervisning som enbart har en visuell approach riskerar att utelämna lärandemöjligheterna av lutning som en förändringstakt mellan

x- och y-värden, det vill säga som en relation mellan två dimensioner som samvarierar. Undervisning som enbart fokuserar på lutning visuellt kan få till följd att eleverna inte upptäcker att lutning är en egenskap hos funktionen, vilket kan vara förödande för elevernas fortsatta lärande om funktioner.

Det visade sig att lärandemöjligheterna blev rikare i de klassrum där elevinspelen utforskades. Sammanlagt identifierades över 100 olika aspekter av den räta linjens ekvation. Analysen av dessa i samtliga 14 lektioner visade stora skillnader i erbjudna lärandemöjligheter mellan lektionstyperna. Det fanns skillnader både i antal undervisade aspekter och, mer signifikant, *vilka* aspekter som undervisades om. Begreppet lutning undervisades i samtliga lektioner utom en. I lektionstyperna 1 och 2, som innehöll utforskade elevinspel, undervisades lutning som ökning av y per x och/eller analytiskt som en förändringstakt i funktionen, men i lektionstyp 3 illustrerades lutning visuellt, som lutning av linjen. Det visade sig att i vissa klassrum drog undervisningen nytta av lärarnas utforskande av elevinspel eftersom lärandemöjligheterna blev mer komplexa i dessa lektioner. Vad detta beror på kan jag ännu bara spekulera i, men om vi studerar vad eleverna bidrog med för innehåll i sina elevinspel kan vi få fler ledtrådar.

Elevernas bidrag i undervisningen av linjära ekvationer

Elever ser på innehållet på olika sätt och min studie visade att många elevers sätt att se innehållet skiljer sig mycket från lärarens. Jämförelsen mellan elevgenererade och lärargenerade aspekter i samtliga lektioner exponerade stora skillnader. Lärarna genererade i huvudsak aspekter av innehållet som kan betraktas som nödvändiga, sådana som vi matematiklärare vet finns i läromedel och annan litteratur om funktioner. Exempel på dessa är att variera m-värden som skärningspunkter för y-axeln och att bygga ihop lutningen och skärningspunkten för y-axeln till den räta linjens ekvation. Trots att dessa aspekter i huvudsak initierades av lärare utvecklades de ofta i samspel mellan elever och lärare. De elevgenererade aspekterna var ganska annorlunda men hade en del gemensamma drag. De vittnade om felaktiga uppfattningar, men belyste också aspekter som ofta tas för givna eller som är helt etablerade i den konventionella matematiken utan att någonsin förklaras ordentligt.

Utmana felaktiga uppfattningar

Elevinspelen bidrog ofta till alternativa och felaktiga sätt att se på linjära ekvationer. Dessa blev utmanade i lektioner där elevinspelen utforskades. Gissningsvis fanns dessa alternativa sätt att se även i de klassrum där inga elevinspel blev utforskade. Några exempel som kom fram i mitt material är:

- att se funktion som en enda punkt
- att utgå ifrån y-axeln som referens för lutning
- att se ekvationen som en linje mellan skärningspunkterna (där k- respektive m-värdet ses som skärningspunkter med de båda axlarna)
- att se negativ lutning som ”något som sker på andra sidan y-axeln”.

Synliggöra det förgivettagna

Elevinspelen bidrog i hög utsträckning med mer okonventionella aspekter av linjära ekvationer och belyste sådant som läraren hade tagit för givet. Dessa aspekter är svåra för eleven att urskilja om de tas för givna i undervisning och lämnas i bakgrunden. Förgivettagna aspekter visade sig ofta vara beroende av elevinspel för att tas fram. Några exempel från materialet var:

- det linjära i linjära ekvationer
- det tvådimensionella i ett koordinatsystem
- att separera noderna i koordinatsystemets rutmönster från skärningspunkterna
- att särskilja decimalkomma och koordinatkomma
- att separera ut parentesers roll för koordinater från ”smileys”
- att ordningen på termerna i ekvationen är irrelevant.

Några gånger bidrog lärare med förgivettagna aspekter, exempelvis genom att variera vilka bokstäver som användes för att representera variabler. Dessutom genererade vissa lärare ”osynliga” möjliga aspekter av linjära ekvationer, såsom k-värdet 1 i ekvationen $y = x + 3$, eller m-värdet 0 i ekvationen $y = 2x$.

Ifrågasätta det konventionella

Några elevinspel bidrog till att ifrågasätta och utveckla vanliga sätt att undervisa om linjära ekvationer. I de allra flesta lektionerna beskrevs m-värdet som skärningspunkt för y-axeln. Men det fanns elever som ifrågasatte detta och i en av lektionerna utforskades elevinspelet. Det ledde till att innehållet fördjupades så att m-värdet blev associerat med skärningspunktens y-värde istället för med själva punkten, och att logiken bakom blev synlig. Om den grafiska representationen av linjära funktioner är välbekant så kan man nog ta x-värdet (som är noll i skärningspunkten) för givet. Men när läraren utforskade elevens inspel framkom det att det inte var helt uppenbart för eleverna att m-värdet är y-värdet i punkten $(0, m)$. Detta ifrågasattes i fler lektioner, men när läraren inte utforskade elevinspelen skapades inga möjligheter till lärande av just det. Alla gånger jag undervisat om den räta linjens ekvation före avhandlingen har jag själv tagit x-värdet för givet i skärningspunkten, och sedan varit förvånad när en del av mina elever inte förstått att varje punkt i ett koordinatsystem har två koordinater. Numera tar jag alltid upp den här aspekten.

Jag menar att många av dessa bidrag; att utmana felaktiga uppfattningar, att synliggöra det förgivettagna eller det osynliga samt att ifrågasätta konventionella förklaringar så att innehåll och logiken bakom blir tydliggjord, är sådant som finns latent även i de tysta lektionerna. Men utan en lärare som utforskar elevinspelen förblir de ofta osynliga i bakgrunden. Det finns ett pris för elevers tystnad när det gäller vilka aspekter av innehållet som det över huvud taget undervisas om. Om vi aldrig utforskar elevernas inspel blir undervisningen mer begränsad och färre lärandemöjligheter erbjuds.

Vilka är slutsatserna som lärare kan ha nytta av?

Den allra viktigaste slutsatsen är att vi som undervisar behöver ta elevernas uppfattningar av innehållet i beaktande. Inte enbart när vi planerar, utan även under pågående lektion. Detta är inget nytt, utan det har upprepats gång på gång så länge som det funnits elever och lärare. Mitt bidrag är att formulera tre skäl till varför det är klokt att använda elevinspelen.

För det första utvecklades rikare lärandemöjligheter under de lektioner där elevinspelen utforskades. Det var inte som jag trodde innan jag gjorde studien, att utforskande av många elevinspel skulle orsaka att lektionen tappade fart eller fokus.

För det andra visade resultatet hur lärare kan använda elevernas felsvar. I materialet fanns det lärare som medvetet använder felsvar i lektionen på ett didaktiskt framgångsrikt sätt. Det förekom två olika varianter av felsvarsanvändning. Några lärare införde felsvar som kunde diskuteras genom att till exempel säga ”I min andra klass var det en elev som sa att stor lutning är som att lutande tornet i Pisa nästan skulle falla. Vad tänker ni om det?” Andra lärare använde felsvar som kom fram i den aktuella klassen för att skapa kontraster av innehållet. ”Ser ni att de här tre eleverna ritar alla funktioner som punkter medan den här eleven ritar dem som linjer? Vad säger ni andra om det?” Felsvaren både lockades fram och utnyttjades när de dök upp spontant. Elevinspelen verkar därför även vara något som lärare kan utnyttja för att själva lära sig att se innehållet från ett annat perspektiv. De lärare som uppmärksammade och utnyttjade felsvar behandlade också innehållet i lektionerna på ett mer komplext sätt. Detta indikerar att lärare som är lyhörda för elevinspel lär sig mer ämnesdidaktiskt innehåll.

För det tredje, även om detta är mer en observation i studien än ett resultat, blev det tydligt att eleverna är medskapare av undervisningen. De flesta av dem är tysta under en hel lektion. Men så finns det elever som frågar tills de förstår, och det förefaller som om dessa elever finns i mycket större utsträckning i de klassrum där elevinspel utforskas. I studien fanns en tydlig koppling mellan mängden utforskade elevinspel och det totala antalet elevinspel som förekom under lektionen. Detta är naturligtvis inget överraskande. I ett klassrum där elevinspel utforskas och efterfrågas uppmuntras naturligtvis fler elever att fråga och kommentera. När jag såg hur viktigt innehållet i elevinspelen var för lärandemöjligheterna var det nästan kusligt att studera de tysta lektionerna och inse att vägg-i-vägg skapades skilda lärandemöjligheter beroende på vad läraren, kanske omedvetet, hade för inställning till elevinspel.

När eleverna kliver in i ditt klassrum har de redan uppfattningar om det innehåll du ska undervisa om, oberoende av om det är ett helt nytt fenomen som är i fokus eller inte. Även om de aldrig har hört talas om den räta linjens ekvation har de sett koordinatsystem sedan de spelade sänka skepp i lågstadieåldern. Och även om de inte har en matematisk syn på begreppet lutning, så har de sett lutande julgranar och torn i Pisa, som båda lutar relativt en vertikal referens. När en elev frågar något är det troligtvis för att hens uppfattning av det du undervisar om på något sätt krockar med din. I det ögonblicket har du som lärare ett fönster till elevens medvetande och en möjlighet att såväl utmana elevens uppfattning som att lära dig själv något nytt om innehållet. Till detta krävs både mod och lyhördhet. Belöningen är bättre lärandemöjligheter.

Frågor att diskutera

De dryga två år som passerat sedan min disputation har inneburit en del nya arbetsuppgifter, även om jag fortfarande delvis undervisar i matematik på högstadiet. Det som tillkommit är ny forskning och undervisningsutveckling på en skola. Trots att jag arbetat i snart två decennier med skolutveckling och trots att frågorna som jag arbetar med idag naturligtvis är mycket bredare än dem i min avhandling, är mitt största yrkesintresse fortfarande vad i undervisning som gör att elever lär sig bättre, i betydelsen bredare och djupare. Jag avslutar med några saker som är värda att diskutera i alla lärargrupper.

1. Varför skiljer vi inte på elevernas värld (alltså deras intressen eller omvärld) och elevernas uppfattningar om innehållet? Självklart är det bra att fånga elevers intressen och ta sin utgångspunkt i saker eleverna känner till, men det är en helt annan sak att även använda deras uppfattningar om fenomenen som vi undervisar om. Och det duger inte att säga: ”Det här är alldeles nytt, de kan ingenting om ...” Ta ett steg tillbaka, fråga eleverna och lyssna på vad de säger så ska du få se att dina elever har perspektiv på och uppfattningar om innehållet som vi lärare har glömt för länge sedan.
2. Varför handlar fortfarande mycket av undervisning om att kommunicera lärares kunskaper när den istället borde handla om att utveckla elevers kunskaper? Ett sidoresultat i avhandlingen, som förvånade mig, var att det gick att se en intern logik i de allra flesta elevinspel. Min studie motsäger att elever slänger ur sig något slumpmässigt. Avhandlingens viktigaste bidrag till lärare är att den utgör ett stöd för att i undervisning våga utforska elevers bidrag, även sådana som dyker upp spontant under själva lektionen. Min lärarerfarenhet säger dessutom att eleverna blir oerhört motiverade av att det är okej att svara fel och av att deras missuppfattningar används. Många lärare menar att de inte vill utsätta elever för att ha fel, men vad säger det om synen på undervisning? I allt lärande ingår att vi har fel, annars är det enbart uppvisning. Är det lärare snarare än elever som är rädda för felsvar?
3. Varför undervisar vi fortfarande så mycket om procedurer i matematik, trots att vi egentligen sedan årtionden vet att förståelse av begrepp, metoder och relationer i matematik är det som leder till framgång på sikt? Några lärare menar kanske att undervisning om t ex begreppet lutning inte bör göras svårare än att vi enbart berättar att det är samma som k-värdet i formeln för den räta linjens ekvation. De har rätt om vi är nöjda med att eleverna kan lösa uppgifter enligt ett recept. Men situationer som inbegriper lutning och som kan lösas med matematik i verkligheten är oftare mer komplexa och kräver både kreativitet och begreppsförståelse bortom procedurer. Istället för att förenkla och tillrättalägga uppgifter behöver vi kanske göra uppgifter mer komplexa och samtidigt vara lyhörda för våra elevers inspel.

LITTERATUR

Maunula, T. (2018). *Students' and teachers' jointly constituted learning opportunities – The case of linear equations.* Göteborgs universitet: Acta Universitatis Gothoburgensis.