

# Tilgange til tidlig algebra

THOMAS KAAS

Undervisning af 6–12 årige i algebra og algebraisk tænkning har under betegnelsen "tidlig algebra" gradvist etableret sig som forskningsområde og undervisningspraksis i et stigende antal lande. På basis af et hermeneutisk inspireret litteraturstudie karakteriserer denne artikel de indholdsmæssige tilgange til undervisning i tidlig algebra, som forskningslitteratur i perioden 1995–2017 giver. Analysen har resulteret i et rammeværk for tilgange til tidlig algebraundervisning, som præsenteres og diskuteres. Artiklen konkluderer bl.a., at undervisning i tidlig algebra typisk tager afsæt i elevers arbejde med tal, kvantiteter og/eller funktionelle sammenhænge, og at elevers algebraiske tænkning søges udviklet gennem aktiviteter, der enten har opdagelser af generelle egenskaber og egenskaber eller ræsonnementer vedrørende ukendte talstørrelser som fokus. Forskelle mellem de forskellige tilgange vedrører desuden den rolle, som repræsentationer og kontekster har i undervisningen.

I de fleste landes læreplaner har undervisning i algebra traditionelt været forbeholdt skolens ældste klassetrin, og der har været en tydelig adskillelse mellem algebra og andre matematiske fagområder (Cai & Knuth, 2011). Det gælder i særdeleshed USA, hvor eleverne typisk først har mødt algebra på særlige kurser i high school (Kaput, 2008), men det gælder i lidt mindre grad for eksempel også i Danmark, hvor skiftende læreplaner frem til 2014 først har omtalt algebra på 4.–6. klassetrin, og hvor det ikke har været tydeligt, hvordan dette fagområde kan flette sammen med andre matematiske fagområder (UVM, 2001, 2003, 2009).

I USA tog en ide om at lade algebra indgå i undervisningen fra 1. til 12. klassetrin og om at flette fagområdet sammen med andre fagområder for alvor fart i 1990'erne efter anbefalinger fra bl.a. The National Council of Teachers (NCTM, 1989) og fra en arbejdsgruppe nedsat af The U.S. Department of Education (Schoenfeld, 1995). Ifølge denne arbejdsgruppe har en traditionel "regnetilgang" til skolematematik efterfulgt

---

**Thomas Kaas**

*Aarhus Universitet og Københavns Professionshøjskole*

af en isoleret og overfladisk tilgang til algebra ført til fiasko for mange elever og dermed udelukket dem fra dele af jobmarkedet. Gruppen argumenterede for, at en tidligere, dybere og mindre isoleret tilgang til algebraundervisning potentielt ville kunne bryde eller reducere algebras rolle som *gatekeeper* i uddannelsessystemet. En anden begrundelse for at bryde med en sen og isoleret tilgang til algebraundervisning er fremført af Mason (2008). Ifølge Mason har børn, allerede når de begynder i skolen, potentialet til at tænke algebraisk. Dette potentiale må udnyttes, fordi algebraisk tænkning er essentielt for borgere i et demokratisk samfund.

Siden er den mere langsigtede undervisning i algebra blevet en integreret del af forskellige instansers anbefalinger til matematikundervisning og af curriculummaterialer i USA (for eksempel NCTM, 2000; NGA & CCSSO, 2010) og til dels i Danmark (UVM, 2014). I samme periode er matematikundervisning i og læring af algebra og algebraisk tænkning på de yngste klassetrin gradvist vokset frem som forskningsområde i flere dele af verden under betegnelsen "tidlig algebra".

### *Hvad er tidlig algebra?*

I 2017 konkluderede Stephens, Ellis, Blanton og Brizuela (2017) på baggrund af et review, at empirisk forskning giver solide argumenter for, at 6–12 årige børn kan og bør udvikle algebraisk tænkning samtidig med, at de udvikler aritmetisk tænkning. Forfatterne konstaterede desuden, at der ser ud til at være flere frugtbare tilgange til algebra på de yngste klassetrin, men at der, især på de yngste klassetrin, ikke er enighed om, hvad der konstituerer undervisningen i algebra.

Der er for eksempel forskellige syn på den rolle, algebraisk notation bør spille i undervisningen på de yngste klassetrin. Radford (2011) argumenterer for, at algebraundervisningen på de yngste klassetrin ikke bør fokusere på brug af konventionel notation, men i højere grad på ræsonnementer med ukendte kvantiteter. Fujii og Stephens (2008) argumenterer for, at talsætninger (number sentences) og tænkning med kvasi-variable bør indgå i undervisningen som en bro fra aritmetiske beregninger til ideen med variable. Brizuela et al. (2015) argumenterer for, at børn bør blive introduceret for notation med variable fra begyndelsen af deres skolegang.

På tilsvarende vis findes der forskellige opfattelser af, hvilken rolle ekstra-matematiske situationer bør spille i tidlig algebraundervisning. Nogle forskere argumenterer for, at algebraisk forståelse vokser ud af elevers forsøg på at repræsentere ekstra-matematiske situationer (for eksempel Kirshner, 2001), mens algebras rolle som reference til sådanne situationer ikke ser ud til at spille en rolle hos andre (for eksempel Hewitt, 2012, 2014).

Diskussioner som disse giver anledning til at rejse spørgsmålet om, hvad der egentlig karakteriserer tidlig algebraundervisning? Ifølge Carraher, Schliemann og Schwartz (2008) er tidlig algebra noget andet end algebra tidligt. Tidlig algebra er med andre ord ikke en traditionel tilgang til algebra, som bare er flyttet til de yngste klassetrin. Men hvad er det så? Stephen et al. (2017) beskriver tidlig algebra som en mulighed for, at de yngste elever kan engagere sig i alderspassende former for algebraisk tænkning, som i mange tilfælde kan bygge på børns hverdagserfaringer. Men hvad er alderspassende former for algebraisk tænkning, og hvordan kan de komme til at bygge på børns hverdagserfaringer?

### *Forskningsspørgsmål og hensigt*

Denne artikel adresserer spørgsmålet om, hvad der karakteriserer det undervisningsmæssige indhold i tidlig algebra ved at præsentere et litteraturstudie, der bygger på følgende forskningsspørgsmål:

- 1 Hvilke indholdsmæssige tilgange til tidlig algebraundervisning foreslås i forskningslitteraturen, og hvordan kan disse tilgange kategoriseres?
- 2 Hvilken rolle spiller kontekster og matematisk syntaks i tidlig algebraundervisning?

Hensigten med artiklen er at give et overblik over forskningsbegrundede tilgange til tidlig algebraundervisning, herunder den rolle som kontekster og matematisk syntaks spiller i undervisningen. Et sådant overblik udgør en karakteristik af tidlig algebra, der potentielt kan bruges af undervisere og forskere som grundlag for analyse af tidlig algebraundervisning og til diskussioner af, hvilke muligheder og begrænsninger, forskellige tilgange til tidlig algebraundervisning kan give.

### *Eksisterende karakteristika af (tidlig) algebra*

Der findes allerede flere bud på karakteristika af, hvad undervisning i algebra kan omfatte på de yngste klassetrin. I dette afsnit præsenterer jeg kortfattet tre af sådanne bud, hvorefter jeg begrundes, at der er behov for alternative karakteristika.

Traditionelt har algebra været karakteriseret som en samling af artefakter (Kaput, 2008). Samlingen omfatter bl.a. ligninger, funktioner og algebraiske strukturer, der har det til fælles, at de kan repræsenteres med bogstaver som pladsholdere for de objekter, de vedrører. I skolesammenhænge kan denne beskrivelse af algebra som "stof" genkendes

fra læreplaner, der lister de indholdsmæssige områder, som elever på bestemte klassetrin skal møde i undervisningen.

I forbindelse med tidlig algebra har flere forskere imidlertid givet bud på karakteristikker, som i højere grad bygger på beskrivelser af tænkning, der kan opfattes som algebraisk (*algebraic thinking* eller *algebraic reasoning*) (Kaput, 2008; Carraher & Schliemann, 2007; Stephen et al., 2017). Et eksempel på en sådan karakteristikk er givet af Kieran (2004, s. 149).

Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which the letter-symbolic algebra could be used as a tool, or alternatively within activities that could be engaged in without using the letter-symbolic algebra at all, for example, analyzing relationships among quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting.

Kieran (2004) overtaler også forskellige faglige emner, som har været fokus for forskningen i tidlig algebra. Det drejer sig om relationer mellem kvantiteter, egenskaber ved tal og regneoperationer og studiet af forandringer i funktionelle situationer. Hun bygger således sin karakteristikk på både beskrivelser af bestemte former for tænkning og af bestemte former for matematisk stof.

Kaput (2008) har også givet en beskrivelse af algebra, der bygger på en sammentænkning af stof og algebraisk tænkning. Til forskel for Kierans er Kaputs beskrivelse dog ikke alene rettet mod tidlig algebra, men mod algebra på tværs af alderstrin. Ifølge Kaput (2008, s. 11) har algebraisk tænkning to kerneaspekter:

- A. Algebra as systematically symbolizing generalizations of regularities and constraints.
- B. Algebra as syntactically guided reasoning and actions on generalizations expressed in conventional symbol systems.

Der til kommer det indholdsmæssige stof, hvori den algebraiske tænkning kommer til udtryk.

1. Algebra as the study of structures and systems abstracted from computations and relations, including those arising in arithmetic (algebra as generalized arithmetic) and in quantitative reasoning.
2. Algebra as the study of functions, relations, and joint variation.
3. Algebra as the application of a cluster of modeling languages both inside and outside of mathematics.

Inspireret af Kaput introducerede Stephens et al. (2017) et rammeværk i deres review over forskning inden for læring og undervisning i grundskolens algebra. De karakteriserede algebraisk tænkning som bestående af fire kerneaspekter: At generalisere, repræsentere, begrunde og ræsonnere med matematiske strukturer og sammenhænge. Disse aspekter kommer til udtryk inden for tre stofområder: Generaliseret aritmetik, funktionel tænkning og kvantitativ tænkning.

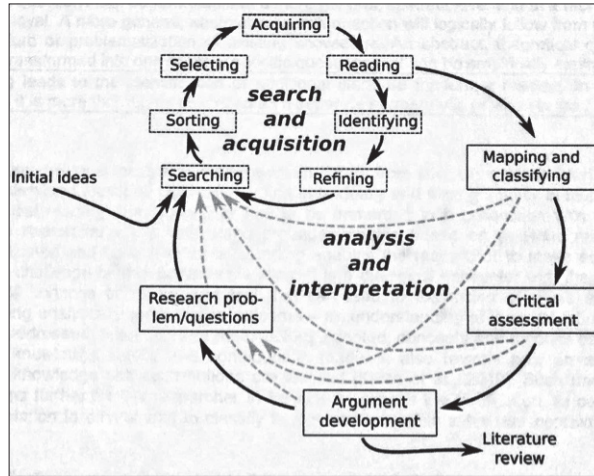
### *Er de eksisterende karakteristiker dækkende og anvendelige?*

Efter min opfattelse beskriver alle de tre karakteristiker centrale aspekter af det, der bør være i fokus i tidlig algebraundervisning. Alle tre karakteristiker er imidlertid baseret på forfatterernes fagopfattelser, og udtrykker derfor ikke nødvendigvis, hvilke aspekter matematikdidaktisk forskning har rettet sig mod inden for de senere år. Alle tre karakteristiker kan desuden kritiseres for hver især at være overlappende, for eksempel kan man forestille sig, at Kaputs punkt 2 og 3 meget vel kan lappe over hinanden, hvis elever arbejder med modellering, der omfatter funktioner. Endvidere kan man diskutere, om de eksisterende karakteristiker giver den form for overblik over fagområdet, som undervisere og forskere har brug for, for eksempel i forbindelse med analyse af undervisningssituationer eller curriculummaterialer knyttet til tidlig algebra.

I studiet, som jeg rapporterer i denne tekst, giver jeg en karakteristisk af tidlig algebra, som er baseret på de seneste ca. 20 års forskning i området. Ambitionen er at bidrage med et overblik og et analyseredskab, som er i tråd med nyere forskning, konsistent, dækkende, overskuelig og anvendelig.

### Metode

Litteraturstudiet er, inspireret af Boell og Cecez-Kecmanovic (2010, 2014, 2015), baseret på en hermeneutisk tilgang til reviews. I modsætning til et såkaldt systematisk review (Gough, Oliver & Thomas, 2017; Pors & Johannsen, 2013) er et hermeneutisk inspireret review ikke en lineær proces, der nødvendigvis indledes med systematiske databasesøgninger. Reviewprocessen betragtes som en forståelsesproces, der udvikler sig gennem en vekslen mellem dele og helheder, dvs. som en vekslen mellem identifikation af relevante tekster og udviklingen af overblik over disse tekster gennem analyser. Forståelsen af litteraturen udvikler sig således gradvist i en vekslen mellem det Boell og Cecez-Kecmanovic (2014) kalder *Search and acquisition* cirklen og *Analysis and interpretation* cirklen.



Figur 1. Et hermeneutisk rammeværk for litteraturreview processer

Note. Genoptrykt fra "A hermeneutic approach for conducting literature reviews and literature searches" af Boell & Cecez-Kecmanovic (2014, s. 264).

Studiet bygger på tre "runder" i de hermeneutiske cirkler fra Boells og Cecez-Kecmanovics model. I det følgende beskrives søgninger og valg i hver af de tre runder.

### Første runde

Hensigten med søgningerne i første runde var at skabe et indledende overblik, der kunne kvalificere de efterfølgende søgninger ved at introducere terminologi, forskningstilgange og navne på centrale forskere inden for tidlig algebra. Et sådant overblik fremkommer, ifølge Boells og Cecez-Kecmanovics (2010, 2014) primært igennem sekundær litteratur. Litteratursøgningen i 1. runde fokuserede derfor på bogudgivelser frem for tidsskriftsartikler og conferencebidrag.

Først blev relevante håndbøger identificeret med søgestrengen "handbook AND mathematics education" i databasen AULIBRARY, og dernæst blev andre relevante bogudgivelser identificeret i samme database med søgestrengen "early algebra" OR "prealgebra" OR "pre-algebra". Ingen af de to søgninger havde tidsbegrænsninger eller begrænsninger på sprog.

Den første søgning gav 52 poster med håndbøger, hvoraf 12 titler blev udvalgt, fordi de retter sig mod matematikundervisning og læring i grundskolens normalundervisning. Den anden søgning gav 29 poster med bøger, hvoraf de 14 var gengængere.

Hensigten med den efterfølgende sortering og udvælgelse af bogkapitler var at identificere de mest relevante tekster i søgningen. Kapitlerne blev sorteret efter det kriterium, at de retter sig mod *primary education* (6–11 årige). På den måde blev de i alt 67 poster reduceret til 42 poster. 38 af de i alt 42 tekster var fra før 2012. Google Scholar blev, jf. Boells og Cecez-Kecmanovics anbefalinger (2014), anvendt til at sortere disse 38 tekster efter det antal gange, de var blevet citeret (september, 2017). 12 af dem var blevet citeret mindst 50 gange. Disse 12 kapitler blev læst sammen med de 4 kapitler, der er udgivet efter 2012.

Læsningen af de i alt 16 kapitler blev foretaget i rækkefølge efter deres udgivelsesår for at give mulighed for at spore eventuelle udviklinger inden for fagområdet. Undervejs i læsningen blev relevante søgeord, navne på forskere, konferencer og pointer noteret. Disse noter dannede grundlag for følgende beslutninger om den fortsatte proces: *perioden for litteraturstudiet blev afgrænset til 1995–2017*.

Denne periode blev valgt, fordi flere af teksterne i 1. runde omtalte et skift for forskningen i grundskolens algebradidaktik, som fandt sted gradvist igennem 1990'erne. Frem til dette tidspunkt fokuserede forskningen primært på elevers fejl og misopfattelser inden for algebra, men i de senere år har forskningen primært fokuseret på de algebraiske forståelser, som de yngste elever er i stand til at udvikle gennem undervisning (Carragher & Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Kieran, 2006; Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016; Stephens et al., 2017)

Ifølge teksterne blev dette skift især initieret af en række arbejdsgrupper, herunder the U.S. Department of education algebra initiative colloquium, som i 1995 udgav en rapport, der anbefalede en satsning på tidlig algebra (Schoenfeld, 1995). Denne rapport fremhæves i flere reviews som en af de faktorer, der dannede afsæt for forskningen i området (Carragher & Schliemann, 2007; Kieran et al., 2016; Stephens et al., 2017). Et nyt relevant søgeord blev tilføjet til de søgeord, der blev anvendt i 1. runde: *(early) algebraization*.

### *Anden runde*

Hensigten med søgningerne i anden runde var at identificere relevant forskningslitteratur fra tidsskrifter, bøger og konferencer. Til det formål blev databasen ERIC valgt, fordi denne database giver adgang til store mængder af uddannelsesrelateret litteratur, og MathEduc blev valgt, fordi det er en international database inden for matematikdidaktik.

I ERIC blev følgende søgestreng anvendt: *ab(algebra\*) OR "pre-algebra" OR "prealgebra" OR "early algebra" OR "algebraic thinking" OR "algebraic reasoning"*. Med denne søgestreng inkluderes tekster, hvor ordet

"algebra" eller forlængelser af "algebra", for eksempel "algebraization", findes i tekstens abstracts. Desuden inkluderes tekster, hvor ordene "pre-algebra", "prealgebra", "early algebra", "algebraic thinking" eller "algebraic reasoning" findes et vilkårligt sted i teksten. Søgningen blev afgrænset til tekster, der er "peer reviewed", til sprogene engelsk, dansk, svensk og norsk, og til uddannelsestrinnene "early childhood education", "elementary education", grade 1, 2, 3, 4, 5, 6, "intermediate grades" og "primary education". Søgningen gav i alt 353 tekster.

I MathEduc blev koderne H11, H12 og H13 valgt for at søge inden for kategorien "Algebra" (H) og underkategorien "comprehensive works on algebra and the teaching of algebra". De sidste tal i hver kode betegner aldersklasserne "preschool" (1), "1st. to 4th year of school" (2) og "5th to 10th year of school" (3). Denne søgning gav i alt 92 nye tekster.

Rundens databasesøgning gav i alt 445 tekster, som blev reduceret til 162 på baggrund af læsning abstracts og til 51 på baggrund af fuldtekstlæsning ud fra følgende inklusionskriterier:

- Publiceret under review
- Publiceret i perioden 1995–2017
- Fokus på elever i aldersgruppen 6–12 år
- Fokus på undervisnings i og/eller læring af algebra
- Forskningsprojekter og forskningsbaserede diskussioner af tidlig algebra

For at bevare overblikket over den voksende mængde af tekster udfyldte jeg til hver tekst, dvs. til de 16 tekster fra første runde og de 51 tekster fra anden runde, et skema med noter i følgende kategorier (figur 2).

Reference
Type forskning
Resume
Hvorfor tidlig algebra?
Hvad forstås som indholdet i tidlig algebra?
Hvordan forstås undervisning i tidlig algebra?

Figur 2. Skema til noter fra inkluderede tekster



### *Tredje runde*

Hensigten med søgningerne i tredje runde var at identificere evt. nye perspektiver på tilgange til tidlig algebraundervisning og tilføjelser til perspektiver, som blev identificeret i anden runde. Til dette formål blev anvendt referencelistesøgninger. Søgningerne havde i denne runde karakter af *snowballing*, dvs. en proces, hvor bunken af relevante tekster vokser gradvist, efterhånden som (nogle af) de udvalgte tekster ”peger” på nye tekster, der kan være relevante (Boell & Cecez-Kecmanovic, 2014; Greenhalgh et al., 2005). Søgningerne førte til tilføjelsen af 14 nye tekster. Til hver af disse 14 tekster udfyldte jeg skemaet fra figur 2 med noter.

### *Overblik over teksterne i studiet*

De tre runder gav henholdsvis 16, 51 og 14, i alt 81, publikationer, som geografisk fordeler sig på følgende måde: (ca. 71 %) er fra Nordamerika, heraf ca. 68 % fra USA. Ca. 10 % er fra Australien, ca. 6 % fra Asien, og ca. 9 % er fra Europa. Ingen af de inkluderede tekster er fra Sydamerika eller Afrika, og de nordiske lande er ikke repræsenteret.

38 af teksterne rapporterer kvalitative studier, der bygger på forsøgsundervisning, observationer og/eller interviews. 13 af teksterne rapporterer kvantitative studier, hvor effekten af en variabel (typisk en bestemt type undervisningsindsats) afprøves blandt en repræsentativ gruppe elever ved hjælp af før- og eftertest og sammenlignes med en kontrolgruppe. 7 af teksterne kombinerer kvalitative og kvantitative tilgange, og 23 af teksterne er studier, der bygger på andre tekster med henblik på at rammesætte eller skabe overblik over forskningsområdet, eller med henblik på at udvikle eller diskutere teoretiske positioner.

68 af teksterne giver konkrete forslag til indholdsmæssige tilgange til tidlig algebraundervisning. De øvrige 13 tekster giver udelukkende mere overordnede perspektiver på tidlig algebra.

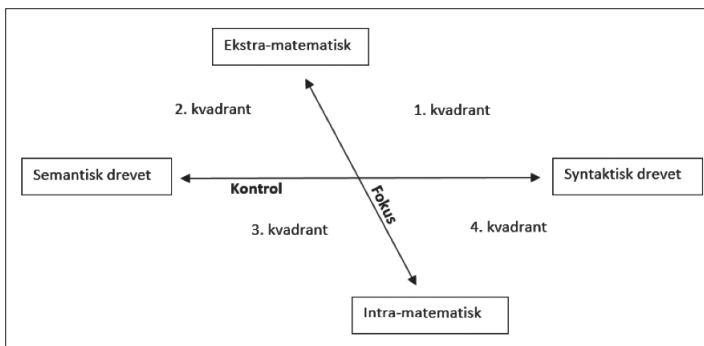
### *Analyse*

Analysen af baserede sig på de 68 tekster, der giver konkrete indholdsmæssige forslag til tidlig algebraundervisning, og foregik i to spor. Det ene spor rettede sig mod de indholdsmæssige tilgange til tidlig algebra (forskningsspørgsmål 1), og det andet spor rettede sig mod den rolle kontekster og matematisk syntaks spiller i tidlig algebra (forskningsspørgsmål 2).

I det ene spor var analysen inspireret af grounded theory (Strauss & Corbin, 1990) og foregik i tre faser. Første fase bestod i udarbejdelsen af noter til hver tekst (jf. skemaet i figur 2). Disse noter fokuserede bl.a. på en karakteristik af de forslag til indholdsmæssig tilgang til tidlig algebra,

som kom til udtryk i teksterne. Jeg beskrev bl.a. teksternes forslag til fagligt stof og forslag til typer af aktiviteter. Anden fase bestod i at sortere de indholdsmæssige tilgange efter typer af stof og aktiviteter. Til hver tekst knyttede jeg foreløbige koder, som reflekterede de typer stof og aktiviteter, der blev beskrevet. Den tredje fase bestod i flere gennemgange af noterne og af kodning af de indholdsmæssige tilgange i hver tekst. I denne fase justerede jeg koderne, indtil der på en meningsfuld måde kunne knyttes en kode til både stoftype og til aktivitetstype i hver af de indholdsmæssige tilgange, der blev foreslået i teksterne.

I det andet spor var analysen inspireret af Carraher og Schliemann (2007) og byggede på modellen i figur 3.



Figur 3. To dimensioner som ligger bag tilgange til tidlig algebra

Note. Tilpasset fra "Early Algebra and algebraic reasoning" af Carraher & Schliemann (2007, s. 677).

Figur 3 viser to dimensioner, der ligger bag tilgange til algebraundervisning. Den ene dimension (den vandrette akse) referer til, hvordan følgeslutninger bliver begrundet i undervisningen. I det ene ekstrem baserer følgeslutninger sig udelukkende på semantisk drevne argumenter, mens følgeslutninger i den andet ekstrem udelukkende baserer sig på syntaktisk drevne argumenter. Den anden dimension refererer til den situation eller det fænomen, som eleverne skal drage følgeslutninger om. I det ene ekstrem hører situationen eller fænomenet udelukkende til omverdenen. I det andet ekstrem hører situationen eller fænomenet udelukkende til i en intern matematikverden. Teoretisk set kan disse to yderpositioner betragtes som komplementære, men i praksis er der, ifølge Carraher og Schliemann, ofte en høj grad af association mellem omverdenen og den interne matematikverden. Det er baggrunden for, at de to forfattere ikke har illustreret de to dimensioner med linjer, der skærer hinanden vinkelret (Carraher & Schliemann, 2007).

Hver af de 68 tekster blev knyttet til den eller de kvadranter fra figur 3, der bedst reflekterer den eller de forslåede tilgange til tidlig algebra.

## Resultater

I dette afsnit beskriver jeg studiets fund i relation til hvert af de to forskningsspørgsmål.

### *Indholdsmæssige tilgange til tidlig algebra*

De indholdsmæssige tilgange til tidlig algebra, som er foreslået i de identificerede tekster, kan kategoriseres i en matrix (tabel 1). Matrixen kombinerer to former for matematiske aktiviteter med tre forskellige stofområder. Hver af de mulige kombinationer mellem aktiviteter og stof udgør en tilgang til tidlig algebraundervisning.

Tabel 1. *Tilgange til tidlig algebra*

Aktiviteter		Stof		
		Aritmetik og tal som tilgang	Aritmetik og kvantiteter som tilgang	Funktionelle sammenhænge som tilgang
At <i>generalisere</i> sammenhænge og egenskaber	opdage repræsentere begrunde	(1A)	(1B)	(1C)
At <i>ræsonnere</i> med ukendte størrelser	oversætte beregne tolke	(2A)	(2B)	(2C)

### *Stofområderne i tidlig algebra*

Stofområdet "Aritmetik og tal som tilgang" (kolonne A) vedrører elevers arbejde med tal og regneoperationer. Kategorien omfatter egenskaber ved rationale tal, regneoperationer med rationale tal samt opstilling og løsning af ligninger.

I litteraturen er der generelt konsensus om, at en tilgang til tidlig algebra kan være at flytte undervisningens fokus fra beregninger med konkrete tal til beregninger med en mængde af tal og dermed understøtte elevers udvikling af algebraisk tænkning. Det kan for eksempel handle om at flytte fokus fra de konkrete additionsstykker til addition af lige tal. Findes der en regel, som gælder for addition af lige tal? Kan I beskrive denne regel? Kan I begrunde den?

Stofområdet "Aritmetik og kvantiteter som tilgang" vedrører elevers arbejde med kvantiteter, dvs. egenskaber ved et fænomen, legeme eller

stof, hvor egenskaben har en størrelse, som kan udtrykkes med et tal og en reference (Stephens et al., 2017). Eksempler på kvantiteter kan derfor være: 15 cm, 20 kg, 14 kr., 60 km/t, 24 elever, 15 cm<sup>2</sup>. Kvantiteter kan opfattes som mentale konstruktioner, der er sammensat af en persons forestilling om et objekt, en kvalitet ved objektet, en passende enhed og en proces med at knytte en numerisk værdi til kvaliteten (typisk ved at tælle eller måle), jf. Smith & Thompson (2007). Det med andre ord "den samlede kvantitet" og ikke kun det tal, som er forbundet med kvantiteten, der er på spil. Det er denne forståelse af kvantiteter, der hører til kategorien "Aritmetik og kvantiteter". For elever i 1. klasse kan det for eksempel betyde, at de sammenligner egenskaber ved fysiske objekter (længde, areal, volumen, masse) og beskriver disse sammenligninger med udsagn som  $A < Y$ , hvor A og Y udtrykker uspecificerede kvantiteter (ikke selve objekterne). Eleverne kan derefter undersøge, hvordan de kan få A og Y til at blive lige store – de enten kan lægge noget til A eller trække noget fra Y. Uanset hvad de vælger at gøre, er det den samme mængde, de skal lægge til eller trække fra, og handlingen kan udtrykkes som  $A + Q = Y$  eller  $Y - Q = A$ , hvis Q betegner differensen mellem de to kvantiteter.

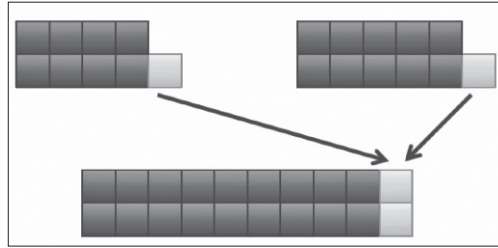
Kategorien "Funktionelle sammenhænge som tilgang" vedrører elevers arbejde med tal eller kvantiteter, der varierer sammen på en måde, som udgør en funktion. Det kan for eksempel handle om sammenhængen mellem figurnummer og antal trekante i en figurfølge.

### *Aktivitetstyper i tidlig algebra*

Den ene form for aktivitet (række 1) vedrører overordnet generalisering. Den tager udgangspunkt i problemstillinger, hvor det er elevernes opgave at opdage en relation eller regelmæssighed, der gælder generelt, dvs. for et domæne der rækker ud over konkrete eksempler (Carragher, Martinez & Schliemann, 2008). Denne form for algebraisk aktivitet involverer elevernes opdagelser af, repræsentationer af og/eller begrundelser for generelle matematiske relationer og egenskaber.

Aktivitetstypen kan for eksempel være knyttet til elevers arbejde inden for kategorien "Aritmetik og tal som tilgang" ved, at eleverne undersøger summer af ulige tal med henblik på at opdage, at denne sum er et lige tal. Efterfølgende kan eleverne repræsentere deres opdagelse, for eksempel med naturligt sprog ("ulige plus ulige giver lige"), med konkrete materialer eller med algebraisk symbolsprog ( $((2n + 1) + (2n + 1) = 2(2n + 1))$ ). Opdagelserne kan danne udgangspunkt for, at eleverne begrundet den opdagelse, de har gjort, for eksempel med støtte i en illustration som på figur 4 (Stephens et al., 2015).

Aktivitetstypen kan også være knyttet til elevers arbejde inden for kategorien "Aritmetik og kvantiteter som tilgang", for eksempel ved at



Figur 4. En illustrationsbaseret begrundelse for, at summen af to ulige tal er et lige tal  
 Note. Tilpasset fra "Just Say Yes to Early Algebra!" af Stephens, et al. (2015, s. 98).

eleverne sammenligner massen af tre forskellige beholdere med henblik på at opdage egenskaber ved relationerne mellem de tre masser. Eleverne kan opdage, at hvis beholder A vejer mindre end beholder B, og beholder B vejer mindre end beholder C, så medfører det, at beholder A også vejer mindre end beholder C. Eleverne kan på samme måde som i forbindelse med aritmetik og tal repræsentere og begrunde deres opdagelse.

Endelig kan aktivitetstypen være knyttet til elevers arbejde inden for kategorien "Funktionelle sammenhænge", for eksempel ved at elever undersøger sammenhængen mellem et antal borde, der sættes i forlængelse af hinanden, og det antal personer, som kan sidde ved dem med henblik på at opdage en sammenhæng, der gælder på tværs af en mængde af tal. Igen kan eleverne repræsentere og begrunde den opdagelse, de har gjort.

Den anden form for algebraisk aktivitet (række 2 på tabel 1) vedrører overordnet ræsonnementer med ukendte størrelser. Denne type aktivitet tager, i modsætning til den første type, udgangspunkt i problemstillinger, hvor der på forhånd er beskrevet en relation eller regelmæssighed mellem de tal eller kvantiteter, der indgår. I beskrivelsen indgår der en eller flere ukendte talstørrelser, og relationen eller regelmæssigheden kan være repræsenteret på forskellige måder, for eksempel med naturligt sprog eller med symbolsprog. Denne form for algebraisk aktivitet involverer oversættelse mellem forskellige typer af repræsentationer for ukendte størrelse (for eksempel oversættelse fra naturligt sprog til symbolsprog i forbindelse med en tekstopgave), beregninger med ukendte størrelser (for eksempel ligningsløsning) og/eller tolkning af resultaterne.

Hvis aktivitetstypen er forbundet med "Aritmetik og tal som tilgang" kan den for eksempel handle om, at eleverne skal udfylde de manglende tal i en serie med åbne talsætninger med henblik på at forstå lighedstegnet som et udtryk for ækvivalente størrelser (Molina, Castro & Castro, 2009) (se figur 5).

Aktivitetstypen kan også være knyttet til elevers arbejde inden for kategorien "Aritmetik og kvantiteter som tilgang" for eksempel ved, at

$8 + 4 = \square + 5$	$\square = 25 - 12$	$14 + \square = 13 + 4$
$13 - 7 = \square - 6$	$\square + 4 = 5 + 7$	$12 + 7 = 7 + \square$

Figur 5. Opgaveeksempel. At ræsonnere med ukendte størrelser/aritmetik som tilgang  
 Note. Genoptrykt fra "Elementary Students' Understanding of the Equal Sign in Number Sentences", af Molina, Castro & Castro (2009, s. 352).

elever løser opgaver som den følgende fra Ng og Lee (2009), der i tekstform beskriver en relation mellem nogle kvantiteter. Hensigten med opgaven er, at eleverne oversætter beskrivelsen af relationerne til andre matematiske repræsentationer (for eksempel til illustrationer eller til ligninger), der støtter deres løsning af opgaven, og tolker den matematiske løsning i forhold til den oprindelige problemstilling.

*Animal problem:* A cow weighs 150 kg more than a dog. A goat weighs 130 kg less than the cow. Altogether, the three animals weighs 410 kg.  
 What is the mass of the cow? (Ng & Lee, 2009, s. 286)

Endelig kan aktiviteten være knyttet til elevers arbejde inden for kategorien "Funktionelle sammenhænge", for eksempel ved at eleverne løser opgaver, der tager udgangspunkt i en beskrivelse af en funktionel sammenhæng. Det følgende eksempel er fra Carraher, Schliemann og Schwartz (2008, s. 249).

Mike has \$8 in his hand and the rest of his money is in his wallet; Robin has exactly 3 times as much money as Mike has in his wallet. What can you say about the amounts of money Mike and Robin have?

Hensigten er, at eleverne oversætter en tekstbeskrivelse af en funktionel sammenhæng til ikoniske og symbolske repræsentationer, fx tabeller, regneudtryk og udtryk med variable. De ikoniske og symbolske repræsentationer bruges sammen med tekstbeskrivelsen til at støtte elevernes ræsonnementer i situationer, hvori der indgår ukendte talstørrelser.

I de publikationer, der indgår i studiet, findes der flest forslag til aktiviteter, som kan knyttes til felt 1C og 2A. Der er færrest forslag, som kan knyttes til 1B (se bilag 1).

### *Kontekster og syntaks i tidlig algebraundervisning*

Resultatet af kategoriseringen af de inkluderede tekster i figur 3 kan beskrives i tre forskellige fund.

For det første blev det fundet, at de tekster, der meningsfuldt kan kategoriseres i modellen fra figur 3, fordeler sig i alle fire kvadranter, dog med flest aktiviteter der hører til 2. og 3. kvadrant (se bilag 2).

For det andet blev det fundet, at langt de fleste forskere beskriver undervisningsforløb i tidlig algebra på en måde, der kan ses som "bevægelser" langs de to akser i diagrammer, og at forskellige publikationer af den samme forsker kan plottes forskellige steder i diagrammet. Kun få forskere fokuserer ensidigt på tidlig undervisning, der hører til i én kvadrant. Generelt hører tidlig algebraundervisning til i hele diagrammet, ofte i bevægelser fra omverden mod "matematikverden" og fra semantisk drevne argumenter mod syntaktisk drevne argumenter. Forskellen mellem de forskellige forskeres syn på tidlig algebraundervisning kan snarere ses på, hvor langt de anbefaler, at undervisningen "kører ud af akserne". Nogle forskere gør det for eksempel til et særligt fokuspunkt, at eleverne kommer til at kunne bygge matematiske argumenter på algebraisk symbolsprog, mens andre forskere i højere grad fokuserer på, at eleverne får mulighed for at udtrykke og arbejde med generaliseringer gennem forskellige typer af repræsentationer, hvoraf egentlig algebraisk notation er en mulighed blandt flere.

For det tredje blev det fundet, at de ekstra-matematiske kontekster, som findes i de inkluderede tekster, oftest har karakter af det, Ole Skovsmose (2003) har kaldt "semi-virkelighed". Eksempel: "Et tog kører den samme rute hver dag. Når det kører samler det to togvogne op ved hvert stop. Hvor mange togvogne har det efter ..." (Blanton et. al., 2015, s. 557, min oversættelse). Jeg har ikke fundet eksempler på den type kontekster, som Ole Skovsmose kalder "reelle referencer", dvs. kontekster, der vedrører en reel omverden.

## Diskussion

Samlet set tegner den karakteristik af tidlig algebraundervisning, der er resultatet af dette studie, et billede af et bredt fagområde. Det er et fagområde, som omfatter matematiske aktiviteter, der er centrale for matematikfaget som helhed, og det er et fagområde, der fletter sammen med andre fagområder. Tidlig algebra kan involvere undervisning i notation med variable, men gør det ikke nødvendigvis. Det er elevernes forskelligartede arbejde med ukendte tal og kvantiteter, der karakteriserer fagområdet. Hvordan disse tal og kvantiteter kan og skal repræsenteres i undervisningen, er fortsat til genstand for diskussion. Endelig er tidlig algebra et fagområde, hvor aktiviteterne kan være rettet mod alsidige kontekster. I hvilket omfang ekstra-matematiske kontekster kan og bør spille en rolle i tidlig algebra er også fortsat til genstand for diskussion.

Efter min opfattelse gør modellerne fra figur 3 og tabel 1 det muligt at kategorisere tilgange til tidlig algebra på en måde, som er

- 1 i tråd med forskning i perioden 1995–2017,
- 2 konsistent og
- 3 dækkende, overskuelig og anvendelig til analyse.

Matrixen fra tabel 1 udgør en karakteristik af tidlig algebra, der omfatter de samme centrale aspekter som tidligere karakteristikker (Kaput, 2008; Kieran, 2004; Stephens et al., 2017), men som adskiller sig ved at skelne mellem aktiviteter, der sigter på, at eleverne opdager, repræsenterer og begrundes generelle sammenhænge og aktiviteter, hvor eleverne arbejder med sammenhænge, der på forhånd er repræsenteret. Disse repræsentationer kan for eksempel bestå af tekster eller regneudtryk, hvori der indgår mindst en ukendt størrelse. I den sidstnævnte type aktiviteter drejer det sig for eleverne typisk om at oversætte repræsentationerne til symboludtryk (for eksempel ved at udforme en tabel eller ved at opstille et regneudtryk) og/eller fortage beregningerne, hvori der indgår en ukendt størrelse. Endelig skal eleverne ofte tolke resultatet af deres beregninger i forhold til den oprindelige situation. En typisk opgave, der er knyttet til den sidstnævnte type aktivitet, består således i at opstille og løse en ligning ud fra en tekstopgave. Adskillelsen mellem de to typer aktiviteter gør det tydeligt, at de centrale aspekter i tidlig algebra på den ene side er rettet mod generalisering og på den anden side er rettet mod at opstille symbolske udtryk, manipulere med dem og tolke resultaterne af manipulationerne i forhold til en kontekst.

Karakteristikken bygger på centrale dele af forskningslitteraturen i perioden 1995–2017, men dog ikke på al relevant forskning inden for området. For eksempel kan afgrænsningen til sprogene dansk, engelsk, norsk og svensk være en årsag til, at den geografiske fordeling af de inkluderede tekster har betydelig overvægt på amerikansk og europæisk forskning.

Det er også væsentligt at bemærke, at selv om de tilgange til tidlig algebra, som udtrykkes i tabel 1 er opstået ud fra teksterne, så er de ikke objektive. Det vil formentlig kunne lade sig gøre at lave andre konsistente modeller, som karakteriserer indholdsmæssige tilgange til tidlig algebra, for eksempel behøver modellen ikke nødvendigvis at omfatte både aktiviteter og stof – den kunne kategorisere teksterne ud fra stof alene. Modellen er således også udtryk for et syn på, hvad der er centrale aspekter af tidlig algebraundervisning, og den er forbundet med en bestemt kultur og tid. I mine øjne er styrken ved den imidlertid netop, at den på en forholdsvis enkel måde giver et overblik over tilgange til tidlig algebra, som samtidig peger på fagområdets centrale aspekter.



Figur 3 (Carraher & Schliemann, 2007) udtrykker andre væsentlige aspekter af tidlig algebra som fagområde, og de to modeller kan samlet set bruges som rammeværk for sammenligninger, analyser og design af curriculummaterialer inden for tidlig algebra. I de nuværende danske læseplaner for algebra på 1.–3. klassetrin kan man for eksempel læse:

Igennem undervisningen skal eleverne have mulighed for at opdage regneregler for og egenskaber ved de naturlige tal, herunder opdagelser, der knytter sig til den kommutative lov, neutralelementerne 0 og 1 samt modsatte regningsarter. Sidst i trinforløbet skal undervisningen også sigte mod elevernes opdagelser af sammenhænge mellem størrelser, for eksempel sammenhængen mellem antal købte is og samlet pris.

I begyndelsen af trinforløbet udtrykker eleverne deres opdagelser af regneregler og sammenhænge i uformelt, verbalt sprog og senere med inddragelse af alsidige sprogformer, herunder symbolsprog.

(UVM, 2014, under Algebra, 1.–3. klassetrin)

Set i forhold til matrixen med tilgange til tidlig algebra (figur 3), lægges vægten i det indhold, som omtales i citatet, tydeligt på aktiviteter af typen "Generaliseringer af sammenhænge og egenskaber". I begyndelsen af trinforløbet er det målet, at eleverne opdager bestemte egenskaber ved tal og regningsarter, men senere i trinforløbet skal opdagelserne også omfatte funktionelle sammenhænge (der dog ikke omtales som funktioner). Set i forhold til matrixen placerer de danske læseplaner for matematik sig således tydeligst i tilgangene 1A og 1C.

I citatet udtrykkes der en bevægelse fra repræsentationer i uformelt, verbalt sprog mod alsidige sprogformer, herunder symbolsprog. Set i forhold til de to dimensioner bag tilgange til tidlig algebra (figur 3) svarer det til en bevægelse langs den vandrette kontrolakse, fra det semantisk drevne mod det mere syntaks-drevne. Teksten udtrykker dog ikke eksplicit, hvor lang denne bevægelse skal drives, det er for eksempel ikke ekspliciteret om symbolsproget skal omfatte variable, og i hvor høj grad det forventes, at elevernes baserer deres ræsonnementer på syntaks alene.

Rammeværket gør det også tydeligt, hvilke indholdsmæssige aspekter af tidlig algebra, som en given undervisning *ikke* fokuserer på. I lighed med de inkluderede tekster i studiet omtales reelle kontekster (jf. Skovsmose, 2003) ikke i forbindelse med algebra på 1.–3. klassetrin i de danske læseplaner. Hvorfor er det sådan?

I den danske folkeskolelov er det et overordnet formål, at undervisningen skal bidrage til elevernes alsidige og demokratiske dannelse (Jensen, 2017). Bl.a. derfor er elevernes udvikling af modelleringskompetence et centralt mål i de danske læseplaner (UVM, 2014). Udvikling

af en sådan kompetence omfatter beskrivelser af generelle sammenhænge i vores omverden med matematiske modeller, der involverer algebra, og refleksioner over betydningen af de antagelser, der ligger bag matematiske modeller, som involverer algebra. Udviklingen af en sådan kompetence må med andre ord række ud over begrebsforståelse og involvere elevernes arbejde med problemstillinger, der vedrører reelle kontekster.

En mulig forklaring på ”de manglende reelle kontekster” i tidlig algebraundervisning kan måske være, at det ikke kan lade sig gøre med elever på de yngste klassetrin? En anden mulig forklaring kan imidlertid være, at dette hjørne af tidlig algebra bare ikke er tilstrækkelig belyst, fordi forskning inden for tidlig algebra primært foregår i lande, hvor matematikundervisningen retter sig mod formål, der i større eller mindre grad afviger fra det danske? Efter min opfattelse er det værd yderligere at udforske, hvilke potentialer og forhindringer der kan være ved i højere grad hidtil at fokusere på reelle kontekster i tidlig algebraundervisning.

## Referencer

- Abramovich, S. (2006). Early algebra with graphics software as a type II application of technology. *Computers in the Schools*, 22 (3), 13.
- Bastable, V. & Schifter, D. (2008). Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra. *Algebra in the early grades*, 165–184.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds’ thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46 (5), 511–558.
- Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412–446.
- Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5–23). Berlin: Springer.
- Boell, S. K. & Cecez-Kecmanovic, D. (2010). Literature reviews and the hermeneutic circle. *Australian Academic & Research Libraries*, 41 (2), 129–144.
- Boell, S. K. & Cecez-Kecmanovic, D. (2014). A hermeneutic approach for conducting literature reviews and literature searches. *CAIS*, 34, 12.
- Boell, S. K. & Cecez-Kecmanovic, D. (2015). On being ”systematic” in literature reviews in IS. *Journal of Information Technology*, 30 (2), 161–173.

- Brizuela, B. & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33–40.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. & Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34–63.
- Brizuela, B. M., Martinez, M. V. & Cayton-Hodges, G. A. (2013). The impact of early algebra: results from a longitudinal intervention. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 209–241.
- Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3–22.
- Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte: NCTM.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). New York: Lawrence Erlbaum.
- Cooper, T. J. & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Berlin: Springer.
- Dougherty, B. (2008). Measure up: a quantitative view of early algebra. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389–412). New York: Lawrence Erlbaum.
- Dougherty, B. J. & Slovin, H. (2004). Generalized diagrams as a tool for young children's problem solving. In M. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of PME 28* (Vol. 2, pp. 295–302). Bergen University College.
- Earnest, D. & Balti, A. A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school: findings from a research-practice collaboration. *Teaching Children Mathematics*, 14(9), 518–522.
- Empson, S. B., Levi, L. & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409–428). Berlin: Springer.
- Ferrara, F. & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1–19.

- Fuchs, B., Lynn, S., Zumeta, R. O., Schumacher, R. F., Powell, S. R. et al. (2010). The effects of schema-broadening instruction on second graders' word-problem performance and their ability to represent word problems with algebraic equations: a randomized control study. *The Elementary School Journal*, 110(4), 440–463. doi:10.1086/651191
- Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 127–140). Reston: NCTM.
- Gough, D., Oliver, S. & Thomas, J. (2017). *An introduction to systematic reviews* (2. ed.). London: SAGE Publications.
- Greenhalgh, T., Robert, G., Macfarlane, F., Bate, P., Kyriakidou, O. & Peacock, R. (2005). Storylines of research in diffusion of innovation: a meta-narrative approach to systematic review. *Social Science & Medicine*, 61(2), 417–430.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, Kolovou, A. & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 281–307.
- Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: Are commonly experienced difficulties avoidable? *Educational Studies in Mathematics*, 81(2), 139–159.
- Hewitt, D. (2014). A symbolic dance: the interplay between movement, notation, and mathematics on a journey toward solving equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(1), 1–31.
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288.
- Jensen, K. M. (2017). *Folkeskoleloven med bemærkninger* (22. udgave ed.). København: Kommuneforlaget.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum.
- Ketterlin-Geller, L. R. & Chard, D. J. (2011). Algebra readiness for students with learning difficulties in grades 4–8: support through the study of number. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 16(1), 65–78.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 11–49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). Early algebra : research into its nature, its learning, its teaching. In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 topical surveys*. Retrieved from <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2>

- Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & L. Lee (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83–98). Dordrecht: Kluwer.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 297–312.
- Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3–28.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231–258.
- Lannin, J. K., Townsend, B. E., Armer, N., Green, S. & Schneider, J. (2008). Developing meaning for algebraic symbols: possibilities and pitfall. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 478–483.
- Leavy, A., Hourigan, M. & McMahon, Á. (2013). Early understanding of equality. *Teaching Children Mathematics*, 20(4), 246–252.
- Lee, J.-E. (2006). Teaching algebraic expressions to young students: the three-day journey of "a + 2". *School Science and Mathematics*, 106(2), 98.
- Lee, K., Khng, K. H., Ng, S. F. & Ng Lan Kong, J. (2013). Longer bars for bigger numbers? Children's usage and understanding of graphical representations of algebraic problems. *Frontline Learning Research*, 1(1), 81–96.
- Lee, K., Ng, E. L. & Ng, S. F. (2009). The contributions of working memory and executive functioning to problem representation and solution generation in algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 373–387.
- Lee, K., Ng, S. F., Bull, R., Pe, M. L. & Ho, R. H. M. (2011). Are patterns important? An investigation of the relationships between proficiencies in patterns, computation, executive functioning, and algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 103(2), 269–281.
- Lee, K., Ng, S. F., Pe, M. L., Ang, S. Y., Hasshim, M. N. A. M. & Bull, R. (2012). The cognitive underpinnings of emerging mathematical skills: executive functioning, patterns, numeracy, and arithmetic. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 82–99.
- Martinez, M. & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(4), 285–298.
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). New York: Lawrence Erlbaum.
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. & Taylor, R. (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316–350.

- McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 310–337.
- McGarvey, L. M. (2013). Is it a pattern? *Teaching Children Mathematics*, 19(9), 564–571.
- Molina, M., Castro, E. & Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 341–368.
- Moss, J. & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 1(4), 441–465.
- Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Ng, S. F. & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 282–313.
- NGA & CCSSO (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington: NGA & CCSSO. Retrieved from [http://www.corestandards.org/assets/CCSSI\\_Math%20Standards.pdf](http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)
- Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children – more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8–13.
- Polly, D. (2011). Technology to develop algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 17(8), 472–478.
- Pors, N. O. & Johannsen, C. G. (Eds.) (2013). *Evidens og systematiske reviews: en introduktion*. Frederiksberg: Samfundslitteratur.
- Powell, S. R. & Fuchs, L. S. (2014). Does early algebraic reasoning differ as a function of students' difficulty with calculations versus word problems? *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(3), 106–116.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303–322). Berlin: Springer.
- Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S. & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: a construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, 103(1), 85–104.
- Schifter, D., Russell, S. J. & Bastable, V. (2009). Early algebra to reach the range of learners. *Teaching Children Mathematics*, 16(4), 230–237.
- Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. In C. Lacampagne, W. Blair & J. J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 2, pp. 11–18). Washington: U.S. Department of Education, OERI.

- Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. In O. Skovsmose, M. Blomhøj & H. Alrø (Eds.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (pp. 143–157). København: L&R Uddannelse.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Smith, J. & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Soares, J., Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching Children Mathematics*, 12 (5), 228–235.
- Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. & Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, 22 (2), 92–101.
- Stephens, A., Ellis, A. B., Blanton, M. & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386–420). Reston: NCTM.
- Stephens, A., Fonger, N. L., Blanton, M. & Knuth, E. (2016). *Elementary students' generalization and representation of functional relationships: a learning progressions approach* (ED566523).
- Stephens, A., Knuth, E. J., Blanton, M., Isler, I., Gardiner, A. M. & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: the impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *Journal of Mathematical Behavior*, 32 (2), 173–182.
- Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research : grounded theory procedures and techniques* (2. printing ed.). Newbury Park: Sage.
- Stump, S. L. (2011). Patterns to develop algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 17 (7), 410–418.
- Suh, J. & Moyer, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26 (2), 155–173.
- Switzer, M. J. (2016). What conceptions have us grade 4–6 students' generalized for formal and informal common representations of unknown addends? *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17 (1), 45.
- Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30 (3), 206–223.
- Townsend, B. E., Lannin, J. K. & Barker, D. D. (2009). Promoting efficient strategy use. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (9), 542–547.
- UVM (2001). *Klare mål, matematik*. København: Undervisningsministeriet.

- UVM (2003). *Fælles mål, matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- UVM (2009). *Fælles mål, matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- UVM (2014). *Fælles mål for faget matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- Venenciano, L. & Heck, R. (2016). Proposing and testing a model to explain traits of algebra preparedness. *Educational Studies in Mathematics*, 92 (1), 21–35.
- Warren, E. & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: the case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (2), 76–95.
- Warren, E. A., Cooper, T. J. & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 25 (3), 208–223.
- Wilkie, K. J. & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, 28 (2), 223–243.
- Xin, Y. P. (2008). The effect of schema-based instruction in solving mathematics word problems: an emphasis on prealgebraic conceptualization of multiplicative relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (5), 526–551.
- Xin, Y. P., Wiles, B. & Lin, Y.-Y. (2008). Teaching conceptual model-based word problem story grammar to enhance mathematics problem solving. *Journal of Special Education*, 42 (3), 163–178.
- Zeljic, M. (2015). Modelling the relationships between quantities: meaning in literal expressions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11 (2), 431–442.



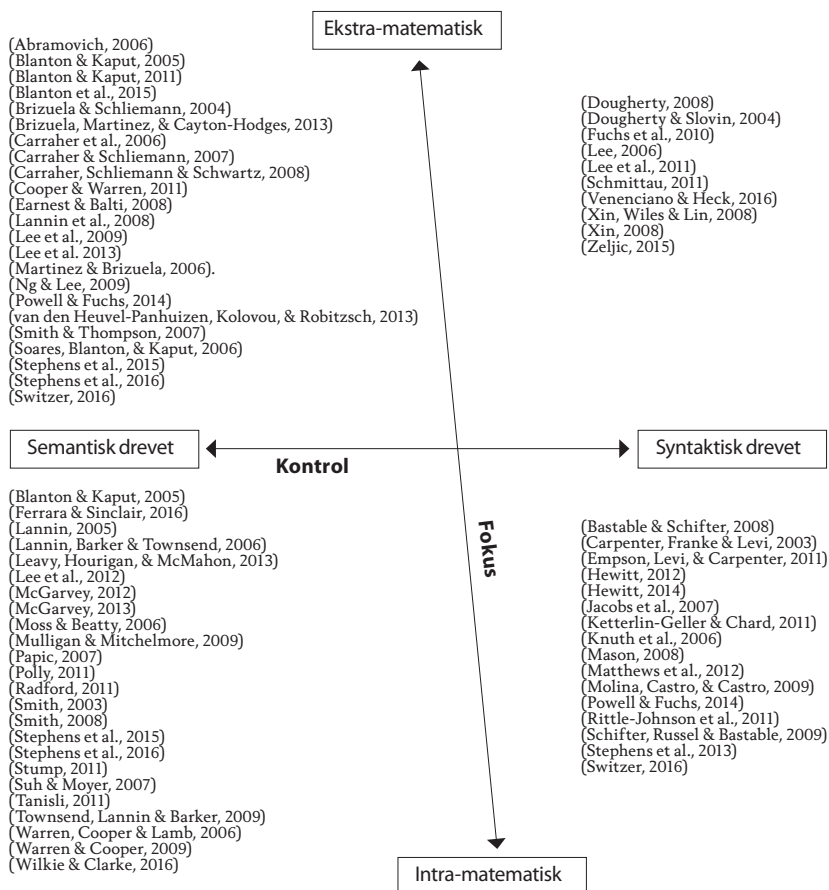
## Bilag 1

Kategorisering af 68 publikationer, som beskriver indholdsmæssige tilgange til tidlig algebra. Bemærk, at nogle publikationer er placeret i flere kategorier, fordi de beskriver forskellige tilgange.

	Aritmetik og tal som tilgang	Aritmetik og kvantiteter som tilgang	Funktionelle sammenhænge som tilgang
<b>At generalisere sammenhænge og egenskaber</b>	(Bastable & Schifter, 2008) (Blanton & Kaput, 2005) (Carpenter, Franke & Levi, 2003) (Empson et al., 2011) (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey, 2007) (Leavy et al., 2013) (Mason, 2008) (Radford, 2011) (Schifter, Russell & Bastable, 2009) (Stephens et al., 2015) (Warren & Cooper, 2009)	(Dougherty, 2008) (Dougherty & Slovin, 2004) (Schmittau, 2011) (Smith & Thompson, 2007) (Venenciano & Heck, 2016)	(Blanton et al., 2015) (Blanton & Kaput, 2011) (Blanton & Kaput, 2005) (Carragher et al., 2006) (Carragher & Schliemann, 2007) (Cooper & Warren, 2011) (Earnest & Balti, 2008) (Ferrara & Sinclair, 2016) (Lannin, 2005) (Lannin et al., 2006) (Lannin et al., 2008) (Lee et al., 2011) (Lee et al., 2012) (McGarvey, 2012) (McGarvey, 2013) (Moss & Beatty, 2006) (Mulligan & Mitchelmore, 2009) (Papic, 2007) (Smith, 2003) (Smith, 2008) (Soares et al., 2006) (Stephens et al., 2015) (Stephens et al., 2016) (Stump, 2011) (Tanisli, 2011) (Townsend, Lannin & Barker, 2009) (Warren et al., 2006) (Wilkie & Clarke, 2016)
<b>At ræsonnere med ukendte størrelser</b>	(Blanton & Kaput, 2005) (Brizuela et al., 2013) (Carpenter et al., 2003) (Cooper & Warren, 2011) (Empson et al., 2011) (Hewitt, 2012) (Hewitt, 2014) (Jacobs et al., 2007) (Ketterlin-Geller & Chard, 2011) (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006) (Leavy et al., 2013) (Matthews, Rittle-Johnson, McEldoon & Taylor, 2012) (Molina et al., 2009) (Polly, 2011) (Powell & Fuchs, 2014) (Rittle-Johnson, Matthews, Taylor & McEldoon, 2011) (Stephens et al., 2013) (Stephens et al., 2015) (Suh & Moyer, 2007) (Switzer, 2016) (Warren & Cooper, 2009)	(Abramovich, 2006) (Dougherty, 2008) (Dougherty & Slovin, 2004) (Fuchs et al., 2010) (Lee, 2006) (Lee et al., 2013) (Lee, Ng & Ng, 2009) (Ng & Lee, 2009) (Smith & Thompson, 2007) (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013) (Venenciano & Heck, 2016) (Xin, 2008) (Xin, Wiles & Lin, 2008) (Zeljic, 2015)	(Blanton & Kaput, 2005) (Brizuela & Schliemann, 2004) (Brizuela et al., 2013) (Carragher et al., 2006) (Carragher & Schliemann, 2007) (Carragher et al., 2008) (Martinez & Brizuela, 2006) (Powell & Fuchs, 2014) (Stephens et al., 2015)

## Bilag 2

Kategorisering af 68 publikationer, som beskriver indholdsmæssige tilgange til tidlig algebra. Bemærk, at nogle publikationer er placeret i flere kategorier, fordi de beskriver forskellige tilgange.



Thomas Kaas

Thomas Kaas er ph.d.-studerende ved Aarhus Universitet og Københavns Professionshøjskole. Han har tidligere arbejdet som folkeskolelærer, læreruddanner og lærebogsforfatter. Hans primære forskningsinteresser er algebraisk tænkning og evaluering i matematikundervisning.

thka@kp.dk

## Abstract

Teaching of 6–12 year old students in algebra and algebraic thinking has gradually become established as a research area and teaching practice in an increasing number of countries, under the term *early algebra*. This article presents a hermeneutically inspired review that was conducted to characterize and discuss content approaches to early algebra teaching provided by the research literature in the period 1995–2017. The analysis of the included literature has resulted in a framework for approaches to early algebra teaching, which is presented and discussed.

The article concludes that early algebra teaching typically takes its starting point in students' work on numbers, quantities and / or functional contexts, and that students' algebraic thinking is taught through activities that have either identification of general relations and properties or reasoning with unknown quantities as focus. Differences between the different approaches relate also to the role of representations and contexts in the teaching.

