Ingvill Merete Stedøy

Arbeta som en matematiker

Denna översatta och lätt bearbetade artikel var publicerad i norska Tangenten 2019:4. Författaren beskriver positiva effekter och förändrade beteenden då elever får stå i smågrupper vid whiteboardtavlor när de arbetar med matematisk problemlösning.

Australiska universitet har sedan 1970-talet använt det de kallar ”whiteboarding”. Det innebär att de använder whiteboardtavlor som ett verktyg i matematikundervisningen för att främja mer kvalificerade resonemang och utveckla samarbetsförmåga. Eleverna ska stå i små grupper vid tavlorna som det går att sudda på och tillsammans lösa matematiska problem.

Metoden används sedan 1992 vid universitetet i Wollongong för alla nyantagna matematikstudenter. Där finns särskilda rum med whiteboardtavlor på alla väggarna. Det har visat sig ha en stor betydelse för hur studenterna beter sig, vilket även medför att lärarnas roll och beteende skiljer sig från traditionell undervisning. Studenterna jobbar mer, är mer engagerade, utvecklar god samarbetsförmåga, studerar varandras arbete, ber studiekamraterna om hjälp istället för att fråga läraren och de delar idéer och lösningar med varandra. Studenterna behöver inte längre vänta på hjälp från läraren. Uttryckt på ett annat sätt: de tänker och arbetar som matematiker.

Klassrumskulturen ändras radikalt. Läraren står inte längre framför klassen och behöver inte hela tiden uppmuntra studenter som inte kommer igång med arbetet. Läraren kan se vad alla arbetar med, hur långt de har kommit och kan ge stöd till hela klassen eller till enskilda grupper.

Peter Liljedahl är en forskare från Kanada som har gjort klassrumsstudier där elever på högstadiet och gymnasiet har arbetat på olika sätt. Hans resultat visar en mycket positiv effekt av att låta eleverna arbete ståendes vid lodräta ytor där de har möjlighet att radera och göra ändringar. Hans forskning visar samma resultat som erfarenheterna från universitetet i Australien. Det är viktigt att läraren rör sig runt i klassrummet, att borden står i olika riktningar och att de inte står nära väggarna samt att uppgifterna presenteras muntligt för eleverna. I en annan studie pekar Liljedahl på fördelen med att slumpmässigt dela in eleverna i tillfälliga grupper med tre elever i varje grupp. Att ständigt samarbeta med olika personer främjar samarbetsförmågan och kunskapsutbytet mellan eleverna.

2014 blev 52 elever från högstadiet inbjudna till universitetet i Wollongong för att vara med på en ”Work like a Mathematician”-dag. Eleverna blev undervisade av matematikstudenter på universitetet. Två timmar skulle de arbeta i ett klassrum med bord och två timmar i ett whiteboardrum. Resultatet var slående. Eleverna och lärarna gav nästan uteslutande positiva utlåtanden om att whiteboarding var bäst, trots att aktiviteten i rummet där eleverna satt vid bord var sådan som elever brukar tycka är rolig och engagerande, medan uppgiften i whiteboardrummet var en rent matematisk problemlösningsuppgift.

De australiska forskarna fortsätter att studera detta sätt att undervisa och nu har åtta lokala skolor skaffat whiteboardrum. Resultaten hittills visar att elevernas engagemang ökar och att det främjar matematiska resonemang och fokuserat elevsamarbete. Fördelarna verkar gälla alla lärare och lärstilar, alla årskurser och elever på alla färdighetsnivåer.

Alan Schoenfeld har identifierat hur professionella matematiker skiljer sig från duktiga elever när de hanterar problemlösning. Matematiker visar varandra hur de arbetar med problemen och hur de resonerar, de korrigerar sig själva, gör skisser och informella anteckningar under lösningsprocessens gång. I en amerikansk undersökning genomförd av Marilyn Carlson och Irene Bloom jämfördes forskare i matematik med doktorander när de höll på med problemlösning. Det visade sig att det som karakteriserade alla matematiker var att när de hade genomfört beräkningarna började de genast utvärdera resultaten och kontrollera om de kunde vara riktiga. Hela tiden reflekterade de över effektiviteten i sina metoder. De ställde sig frågor som ”Kommer denna metod att ta mig närmare en lösning?” och ”Vad säger detta mig?”. Denna självkontroll, och villigheten att lägga en metod åt sidan och börja om på nytt, var inte kännetecknande för doktorandernas arbetssätt.

För att elever ska lära sig att arbeta som matematiker blir lärarens roll extra viktig. Läraren måste vara villig att ge eleverna tid utan att störa, men samtidigt uppmuntra uthållighet och ge stöd och tips om eleverna ger upp. Istället för att svara ja eller nej när de frågar om de har fått rätt svar, bör läraren hellre ställa en motfråga som riktar in eleverna mot hur de själva kan bedöma om svaret kan vara korrekt.

Tavlor till eleverna prövas i norska klassrum

Hösten 2018 startade tio norska gymnasielärare sina specialiststudier i matematik. Jag undervisade de erfarna lärarna i kursen ”Lärande och undervisning i matematik” som gick över två terminer. Redan på första samlingen fick de pröva att arbeta med problemlösningsuppgifter ståendes vid tavlor och indelade i slumpmässigt sammansatta grupper. Erfarenheten var uteslutande positiv.

Under hela skolåret använde de sedan metoden med sina egna elever. Förutom att använda tavlor till alla lade de stor vikt vid att gruppera eleverna slumpmässigt vid varje tillfälle. De lyfte också fram användningen av ramverket *fem undervisningspraktiker* samt *kommunikativa drag* och *utforskande frågor* vid planering och implementering av undervisningen. I texter där lärarna analyserar sin egen praktik beskriver de samma positiva effekter som forskarna. En av lärarna skrev:

> *Mina elever vill inte ha min hjälp längre! De tar själva reda på det eller fråga någon annan grupp. Min roll som lärare har radikalt förändrats och eleverna arbetar självständigt, målmedvetet och med stor uthållighet.*

Lärarna kunde också berätta om elever som upplevde stunder när de plötsligt förstod en lösning eller ett sammanhang, och hur detta gav eleverna ny tro på sin egen förmåga och en mer positiv inställning till ämnet. Detta liknar vad Liljedahl i sin forskning kallar ”AHA-ögonblicken”.

Parallellt med att lärarna i kursen använde denna metod i sina klasser, samarbetade jag med lärare i flera gymnasieskolor där vi genomförde flera lektioner med tonvikt på utforskning och problemlösning.

Jag ska nu beskriva och analysera elevers arbete med en problemlösningsuppgift. Med problemlösningsuppgift menar jag här att det inte finns någon uppenbar metod som eleverna ska välja för att lösa problemet och att de inte har sett problemet tidigare. Uppgiften kan vidare karakteriseras som en LIST-uppgift (låg ingångströskel, stor takhöjd), det vill säga lätt att komma igång med, alla kan komma fram till ett svar eller en del av ett svar och uppgiften kan utökas eller generaliseras.

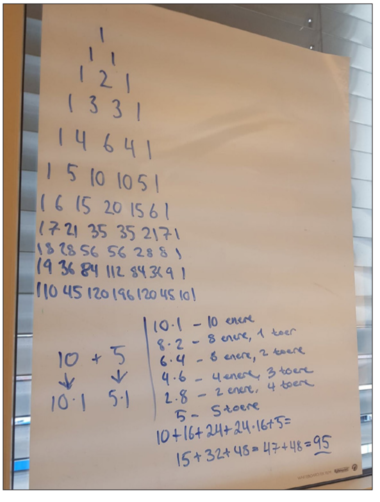
Kalle Kanin

Uppgiften *Kalle Kanin* är hämtad från youcubed.org, utvecklad vid Stanford Graduate School of Education.

> Kalle Kanin ska hoppa i en trappa med tio steg. Han startar längst ner och kan antingen hoppa ett eller två steg åt gången. Han hoppar inte neråt igen. På hur många olika sätt kan Kalle Kanin hoppa för att komma till toppen av trappan?

Uppgiften har använts i flera klasser både i grundskolan och gymnasieskolan. Här vill jag presentera och analysera arbetet och lösningarna från två matematikgrupper på gymnasiet, en studieförberedande (S1) och en praktiskt yrkesinriktad (2PY). Eleverna delades slumpmässiga in i smågrupper och fick arbeta vid tavlor som hade satts upp på väggen. Jag var deltagande observatör i S1-gruppen och lärare i 2PY-gruppen. Båda grupperna hade nyligen jobbat med kombinatorik, binomialkoefficienter och Pascals triangel. Jag har även observerat och undervisat samma uppgift i andra gymnasieklasser där den största skillnaden i val av metod var att dessa inte hade arbetat med kombinatoriska problem där binomialkoefficienter hade införts. De hade endast erfarenhet av att räkna systematiskt på olika sätt. Det bör också nämnas att samma problem har använts med stor framgång av mina kollegor på Matematikcentret i Trondheim, både i motsvarande svenska grundskolans årskurs 1 och årskurs 5. Systematiska metoder av olika slag användes också av några av grupperna i S1 och 2PY. Jag ska nu närmare beskriva några lösningar från några olika elevgrupper.

Grupp 1



Den första gruppens tavla visar att eleverna har tänkt att det här är kombinatorik och att de nyss har lärt sig det. De söker en metod som de känner till sedan tidigare och de prövar om Pascals triangel kan vara användbar. Detta är ganska typiskt för elever som är vana vid att lösa uppgifter genom att återkalla formler och metoder som de redan känner till. De har inte utvecklat förmågan att möta nya problem utan tror att de borde kunna använda en känd metod.

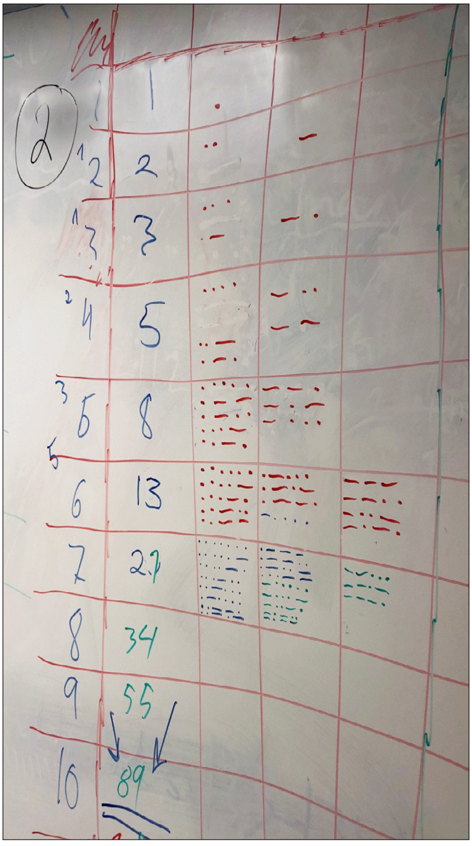
Eleverna får ingen hjälp av Pascals triangel, men gruppen ger inte upp utan försöker med en annan metod. De försöker kombinera informationen i uppgiften och resonera logiskt kring talen för att ”göra något med talen”, vilket ger ett ganska rimligt resultat.

Den här gruppen kan inte förklara eller bevisa varför denna metod bör ge ett korrekt resultat. Det som gör dem bekväma med sitt resultat är att de faktiskt anser att svaret är korrekt. Vad de har baserat sitt argument på är att Kalle kan ha de olika kombinationerna av enkla och dubbla hopp som de har skrivit längst ner till höger på tavlan. Detta är helt korrekt, men de har inte sett hur de kan använda det för att hitta *alla* kombinationer.

Eleverna i den här gruppen visar till en viss grad att de är goda problemlösare, de är både uthålliga och prövar en ny metod när den första inte fungerar, och när de har kommit fram till ett svar bedömer de svarets rimlighet.

Grupp 2

Nästa grupp prövade först att använda binomialkoeffcienter men lyckades inte lösa uppgiften. Efter lite diskussioner och överläggning med en annan grupp kom de på att de kunde använda metoden ”titta på ett enklare problem” för att undersöka om ett mönster skulle visa sig.



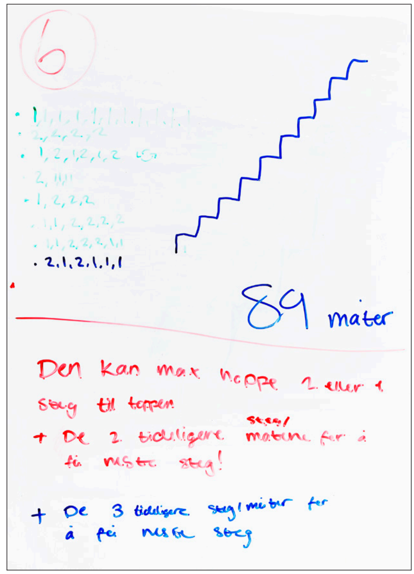
De gjorde en stor tabell, där första kolumnen visar antalet steg som Kalle har hoppat och nästa antalet sätt han kan komma till toppen. Systemet med prickar och linjer är en notation för enkla och dubbla hopp och hur de kan kombineras för att få rätt antal steg. När de nådde sjätte steget på trappan hade de formulerat en hypotes som fick dem att förvänta sig 13 möjligheter. De kände inte till Fibonaccitalen, men de såg att genom att utöka med ett steg skulle antalet möjligheter vara summan av de två föregående.

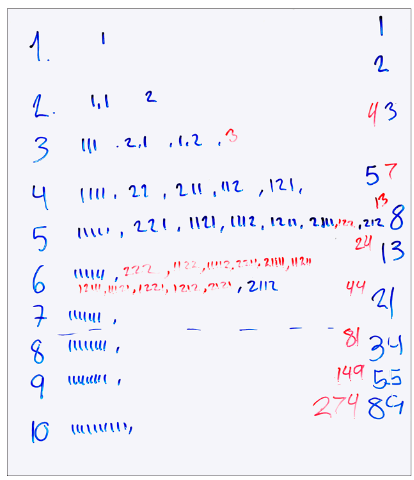
Efter en stund hade de hittat 12 möjligheter. De var inte nöjda med det och började leta efter fler. De övervägde om hypotesen kanske inte stämde. Plötsligt såg de att de hade förbisett möjligheten de skrev med blått, nämligen ett dubbelhopp först och sedan fyra enkelhopp. Således var de ganska övertygade. De sökte vid steg 7, hittade 21 alternativ och fyllde sedan i resten av tabellen. Lösningen var att det fanns 89 möjligheter. Jag utmanade dem att bevisa, eller argumentera för, varför detta var rätt svar. Men det var först när en annan grupp som använt samma metod gav sin förklaring som de förstod. Jag tar inte med den gruppens tavla utan kommenterar istället en annan tavla med ett liknande resonemang som presenterades av en elevgrupp i 2PY.

Grupp 3

Nästa tavla tillhör alltså en grupp med tre flickor från 2PY. Efter att ha försökte hitta alla möjliga kombinationer för Kalles hopp i trappan med tio steg hade de faktiskt gett upp. Det blev så rörigt och osystematiskt att de slutade försöka och stod bara och tittade på de andra. Jag tänkte att denna grupp behövde ett tips som kunde motivera dem att försöka igen. Tipset de fick var att försöka med ett steg, två steg, tre steg och så vidare i trappan. Gruppen började om med stor iver. Resultatet av deras arbete syns på de båda tavlorna till höger. Den sortens stöttning ligger helt i linje med Liljedahls slutsatser att:

> *Elevernas engagemang bör stimuleras och upprätthållas med hjälp av lärarnas kloka och användbara tips.*





Den röda texten i bilden lyder: ”Den kan max hoppa 2 eller 1 steg till trappan. De 2 tidigare steg/sätten för att få nästa steg!” Den texten hör ihop med den ursprungliga uppgiften där Kalle kan hoppa ett eller två steg åt gången. Beräkningarna till den lösningen är skrivna med blått på den andra tavlan.

Då flickorna kom till det sjätte steget var de övertygade om att det fanns 13 möjligheter. De såg mönstret i Fibonacciföljden (som de inte tidigare hade hört talas om) och skrev upp talen till och med steg 10. De har skrivet upp algoritmen med ord formulerat som ”De 2 tidigare steg/sätten för att få nästa steg”. På frågan varför det var så och om de var säkra svarade de efter lite prat att för att komma till steg 6 måste Kalle antingen komma till steg 4 eller steg 5, så antalet möjligheter för steg 6 måste vara summan av möjligheterna för att komma till steg 4 och 5. Då kunde de lätt se att för att hitta möjligheterna att komma till ett visst steg måste de sammanfatta möjligheterna i vart och ett av de två föregående stegen. Nu var de klara för nya utmaningar och fick en utökning av uppgiften:

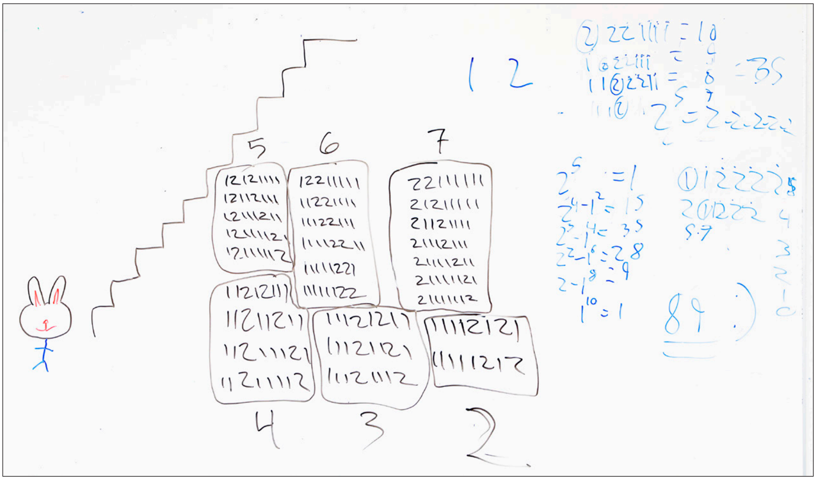
> Vad händer om Kalle också lyckas hoppa tre steg åt gången?

Flickorna löste ganska snabbt den nya uppgiften. De skrev med blå penna på den första tavlan: ”De 3 tidigare steg/sätten för att få nästa steg”. De satte först upp möjligheten för ett trestegshopp på en trappa med 3 steg och därefter var det bara att fylla på. De var helt säkra på att det fanns 274 olika vägar att komma till toppen av trestegstrappan med enkla, dubbla eller tredubbla hopp. När de förklarade detta för klassen var alla eniga om att det måste vara rätt – och alla förstod varför.

Grupp 4

Gruppen som arbetade vid den sista tavla jag tagit med har introducerat en speciell notation till höger på tavlan. De började med att lista hur många dubbla och enkla hopp Kalle kunde ta för att komma till toppen av trappan med tio steg. De skrev:

$$\begin{array}{rl}
2^5 & = 1 \\
2^4 - 1^2 & = 15 \\
2^3 - 1^4 & = \\
2^2 - 1^6 & = \\
2 \; - 1^8 & = 9 \\
1^{10} & = 1
\end{array}$$



När de förklarade vad de menade sa de att exponenterna visade hur många två-hopp och ett-hopp Kalle kunde använda. Strecket var inte ett minus utan ett tankestreck. Efter likhetstecknet skrev de antal möjligheter. Då en annan grupp kommenterade att notationen egentligen betydde något helt annat hävdade de att det inte spelade någon roll, bara de förklarade vad de menade. De fyllde snabbt i resultaten 1, 15, 9 och 1 efter likhetstecknen.

Vi ser på tavlan att de har listat möjligheten med två dubbla och sex enkla hopp. Genom att jämföra med en annan grupp insåg de att de hade missat en möjlighet och skrev in 28, utan att de tog reda på vilken de hade missat. Glappet i deras system syns i den sist inramade kombinationsraden där de har fått med kombinationen 1111 2121 och 1111 1212 men missat 1111 2112.

De kämpade också med att dokumentera att det finns 35 möjligheter med tre dubbla och fyra enkla hopp. När flickorna förklarade varför det var totalt 89 tänkte de att antalet de saknade måste vara 35. De insåg också att deras metod för uppräkning fungerade, men att de inte hade hittat ett mönster som de kunde använda sig av.

Tavlornas betydelse

Undervisningsupplägget kännetecknades av att eleverna indelades slumpmässigt i tillfälliga grupper så att nya elevkonstellationer skapades varje gång. Eleverna arbetade tillsammans vid tavlor för att lösa ett för dem okänt matematiskt problem och de uppmuntrades att söka råd från andra grupper om de fastnade. Eleverna var enträgna och arbetade så länge läraren inte avbröt för gemensam genomgång. De använde olika relevanta problemlösningsstrategier, avvisade metoder som inte fungerade och började sedan om igen.

Jag vill påpeka några saker som skiljer elevernas beteende från beteenden jag har observerat i klasser där eleverna sitter vid bord. När elever som står vid en tavla ges uppgiften muntligt är de mycket koncentrerade och antecknar omedelbart viktig information eller ritar en figur. Det är slående hur alla elever i gruppen deltar i lösningsprocessen och de ivrigt diskuterar olika lösningsstrategier och om de är på rätt väg. Alla skriver på tavlorna när idéer dyker upp. Eleverna vågar ta chanser och om problemet är okänt för alla är det nästan omöjligt att särskilja olika elevers kunskapsnivå förrän de har kommit långt i lösningsprocessen.

Något annat som är viktigt att notera är att grupperna tar råd från varandra. Detta kan förklaras av att det är lättare att röra sig runt bland de andra grupperna, men också att eleverna bara kan vända sig om och se de andra elevernas lösningar. De kan då enkelt avgöra om de tror att det är lönt att fråga någon annan grupp.

När eleverna har fått insikt i andra gruppers arbete under lösningsprocessen verkar det också som om de har större utbyte av presentationerna i slutet av lektionen. Läraren bör noga välja ordningen på gruppresentationerna så att kunskapsutbytet blir optimalt för alla elever. I den här fasen märks också att eleverna blir bättre på att ställa frågor till sina kamrater för att be dem klargöra vad de menar och logiken bakom de metoder de valt.

Dessa exempel bekräftar resultaten från forskning som visar att enkla organisatoriska grepp kan göra stor skillnad i motivation, uthållighet, samarbetsklimat och problemlösningsfärdigheter hos eleverna.

LITTERATUR

Carlson, M. P. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational studies in Mathematics, 58*, 45–75.

Liljedahl, P. (2014). The affordances of using visibly random groups in a mathematics classroom. I T. Li, E. Silver. & S. Li. (red). *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (127–144). New York: Springer.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 undervisningspraktiker i matematik – planera och leda rika matematiska diskussioner.* Natur och Kultur.

En komplett referenslista och länk till originalartikeln finns på Nämnaren på nätet.

Översättare: Rose-Marie Wikström