

Lösa problem

- utmaningar och möjligheter med att låta eleverna skapa lösningsmetoder

Innehåll

- "Trad." undervisning och problemet med den.
- Workshop 1 – i par
- Några av orsakerna till trad. undervisning
- Hur man kan förändra undervisningen
- Workshop 2 – i par
- Tid för frågor

Johan Sidenvall

Lektor och forskare

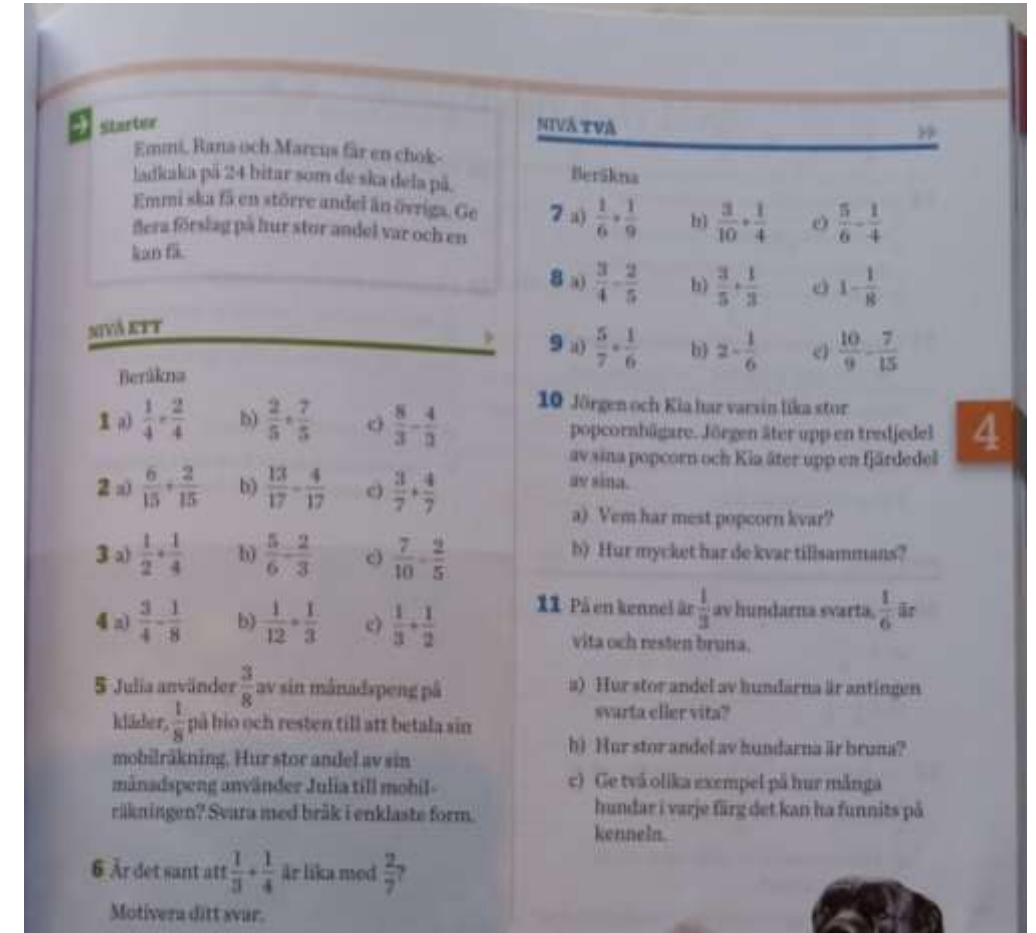
Hudiksvalls kommun

Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik

Vanligt förekommande undervisning

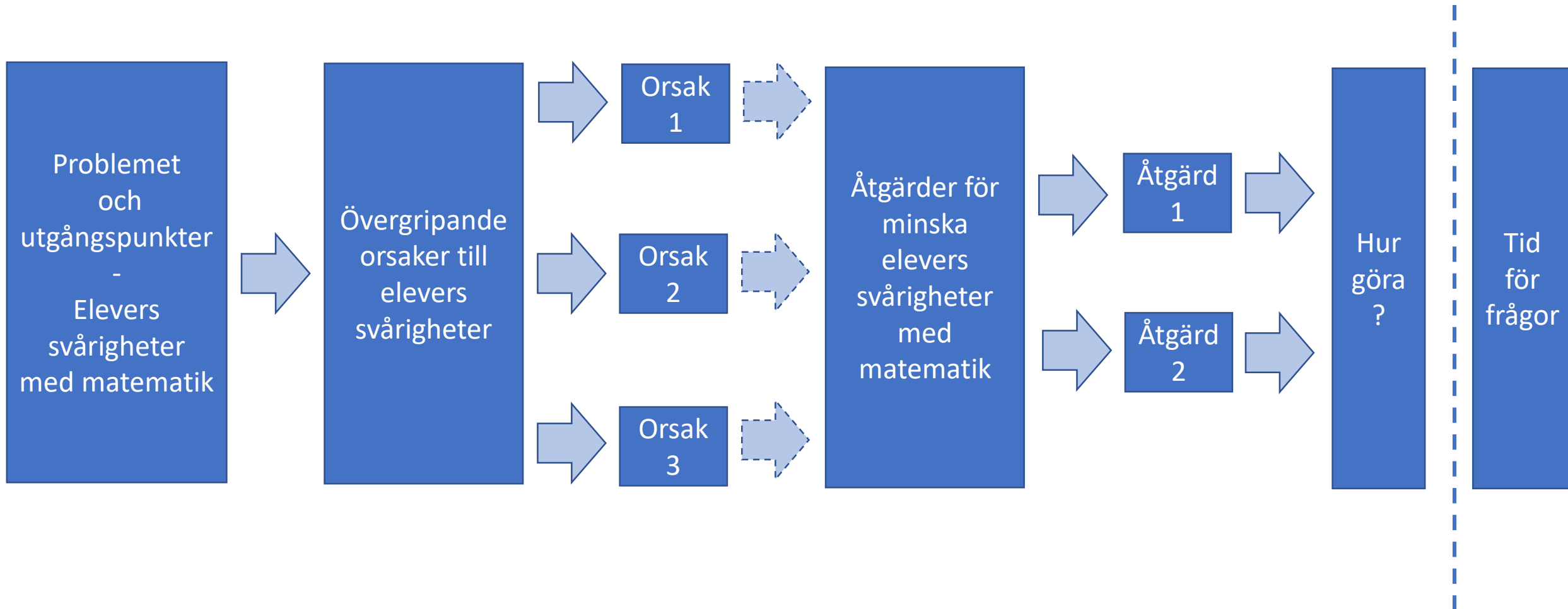
- Lärare presenterar lösningsmetod av uppgiftstyp
- Eleverna räknar uppgifter
- Läraren går runt och hjälper
- Eleverna lär sig...

... just då i alla fall



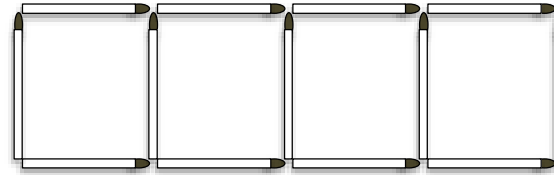
(Cederqvist m fl., 2012)

Upplägg



Uppgift

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:



Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

Uppg från Jonsson et al (2014)

Uppgift –två och två

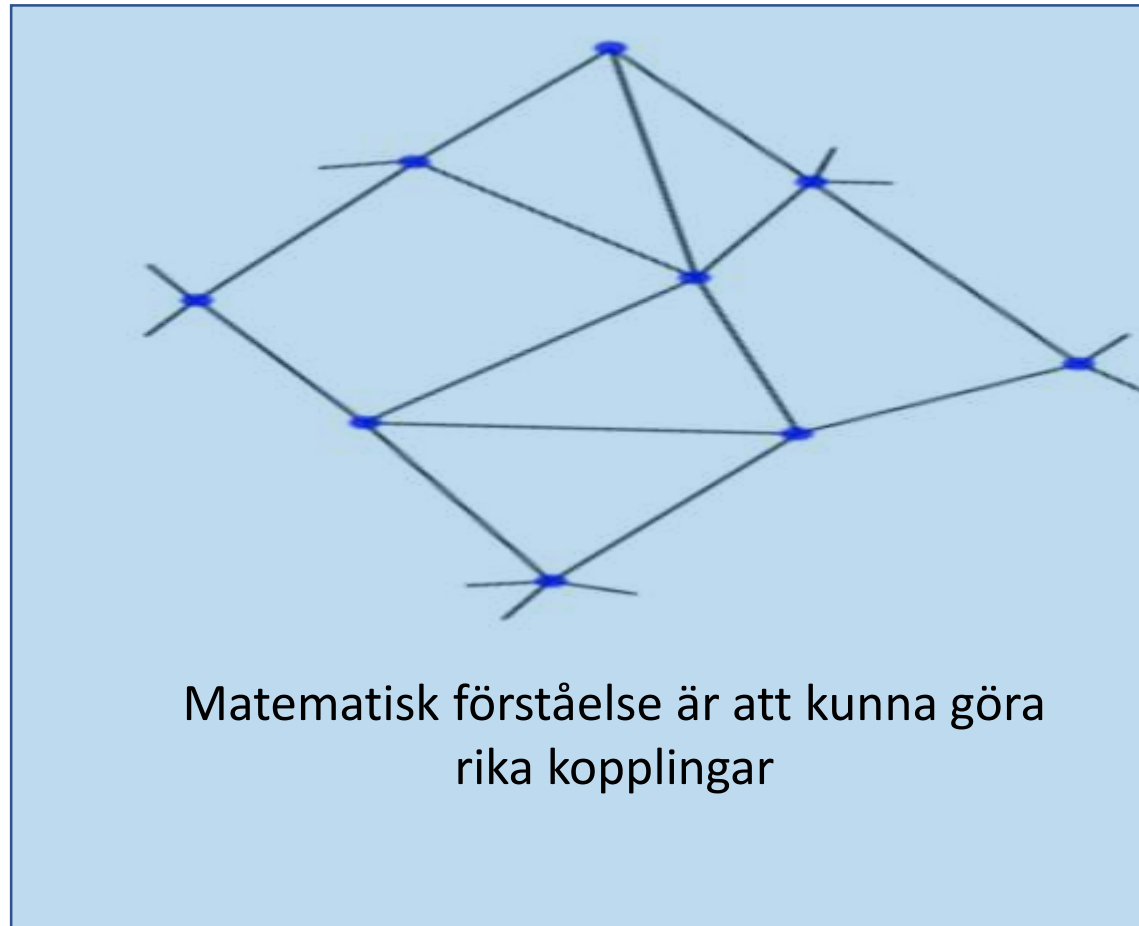
- En "elev" - som inte klarar att lösa uppgiften (lotsas att du inte kan lösa uppgiften)
- En "lärare" - som ger eleven hjälp (ge den hjälp som du brukar ge)
- Ingen gemensam redovisning efter

Problemet & utgångspunkt

- Matematikundervisning domineras av utantillinlärning och arbete med rutinuppgifter
- På bekostnad av undervisning där elever egna skapar lösningsmetoder (problemlösning)
- Trots lärandefördelar med undervisning där elever skapar egna lösningsmetoder (problemlösning)

(Boaler, 1998; 2014; Hiebert & Grouws, 2007; Schoenfeld 1985; 2018)

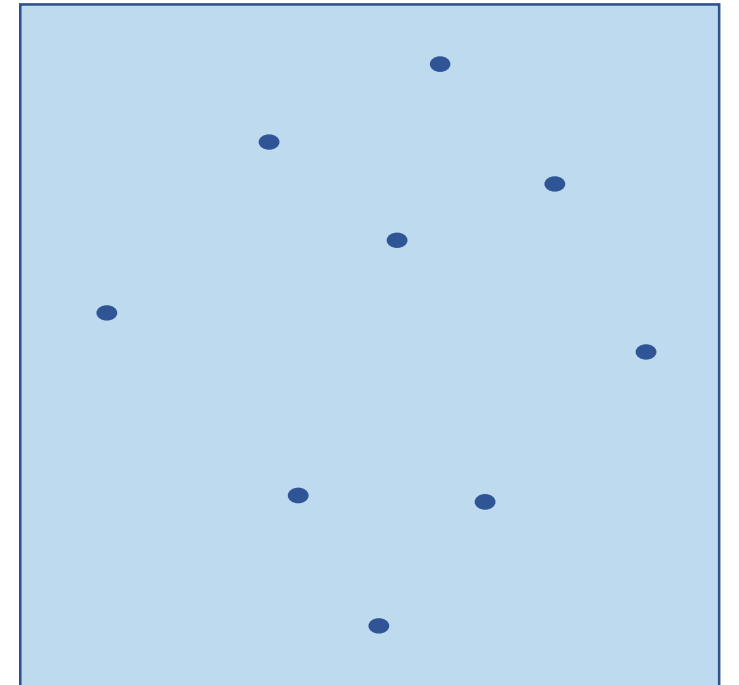
Positiv ansträngning – vägen mot djupare förståelse



Struggle

Varför problemlösning undervisning inte är vanligare

1. Den imitativa undervisningstraditionen är stark
2. Ganska enkelt att undervisa genom att visa lösningsmetoder för elever
3. Att följa lösningsmetoder *känns* effektivt
4. Lärande via problemlösning kräver mer av lärare och elever



”Varning”!

- Det handlar inte om att *inte* lära sig utantill
- Det handlar inte om att eleven ska klara sig utan lärare
- Det handlar inte kasta ut läroboken från undervisningen



3 slides om teori

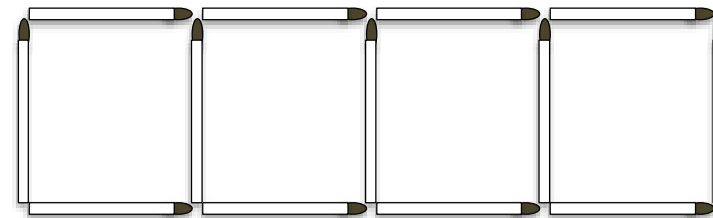
Vad som är en problemuppgift är relativt

Om en uppgift är en problemuppgift avgörs av om eleven har tillgång till en **lösningssmetod** eller inte.

- Om lösningssmetoden är **känd** av eleven sedan tidigare är det ingen problemuppgift.
- Om lösningssmetoden **ges** av bok, lärare eller på annat sätt är det ingen problemuppgift.
- Ett "**läst**" är inte alltid (tom. sällan) en problemuppgift.

Följa känd lösningsmetod

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:



Om x är antalet kvadrater som ska läggas i rad så kan man beräkna antalet tändstickor y med funktionen $y = 3x + 1$

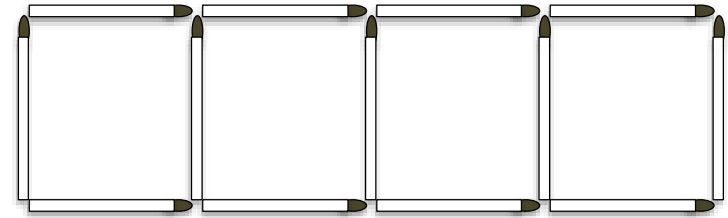
Exempel: Om 4 kvadrater ska läggas i rad behövs $y=3x+1=3\cdot 4+1=13$ tändstickor.

Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

(Jonsson m. fl., 2014)

Skapa lösningsmetod (problemuppgift)

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:

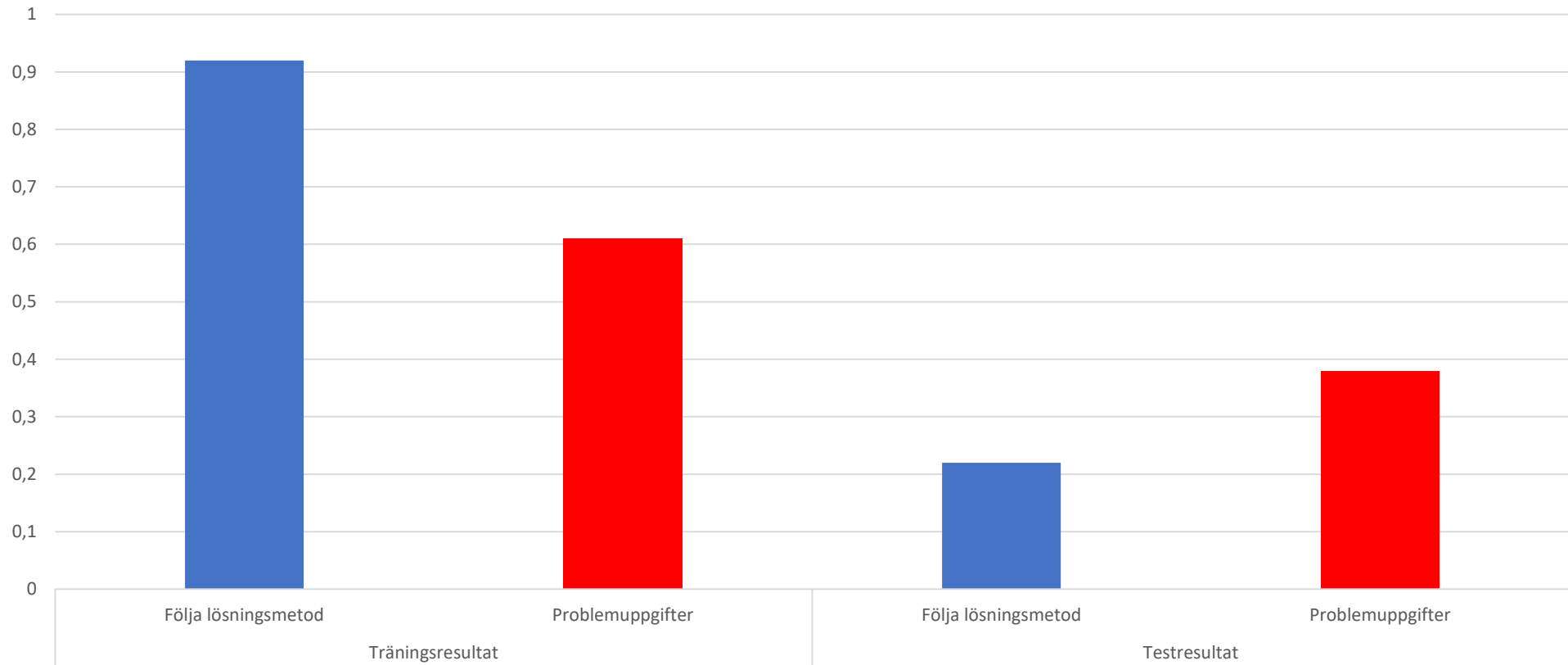


Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

(Jonsson m. fl., 2014)

Resultat vid träning och test

Andel korrekt svar



(Jonsson m. fl., 2014)

Läroboksuppgifter - följa lösningsmetod

Ekvationslösningens grunder
Svårare ekvationer går oftast inte att lösa med övertäckning. Det innebär att man också måste kunna använda andra metoder. När man löser ekvationer, vill man få den obekanta ensam i ena ledet. Därför försöker man steg för steg ta bort allt annat från det ledet. De grundläggande principerna för ekvationslösning är enkla. Man kan addera, subtrahera, multiplicera eller dividera med vilket tal som helst, så länge man gör likadant i båda leden.

Subtraktion
 $x + 7 = 19$
 $x + 7 - 7 = 19 - 7$
 $x = 12$
Subtrahera 7 från båda leden

Addition
 $x - 13 = 20$
 $x - 13 + 13 = 20 + 13$
 $x = 33$
Addera 13 till båda leden

Division
 $3x = 45$
 $\frac{3x}{3} = \frac{45}{3}$
 $x = 15$
Dividera båda leden med 3

Multiplikation
 $\frac{x}{6} = 5$
 $\frac{x}{6} \cdot 6 = 5 \cdot 6$
 $x = 30$
Multiplicera båda leden med 6

NIVÅ 1

2211 Lös ekvationerna. Pröva därefter om din lösning stämmer.
a) $x - 16 = 5$ b) $\frac{x}{5} = 12$
c) $19 = 25 + x$ d) $8x = 20$

2212 Lös ekvationerna. Pröva därefter om din lösning stämmer.
a) $5x + 12 = 102$ b) $9 + 6x = -39$
c) $18 - 10x = 73$ d) $100 = 72 + 2x$

2213 Är $x = 4$ en lösning till ekvationen
a) $7x + 5 = 31$ b) $\frac{x}{2} - 8 = -6$
c) $32 - 6x = 12$ d) $\frac{3x}{2} = 27$

Foto: Johan Sidenvall

(Szabo m. fl, 2012)

Läroboksuppgifter - följa lösningsmetod

ing



Exempel När Malin ska köpa sin första bil måste hon ta ett lån på 10 000 kr. Lånet ska betalas tillbaka på 4 år. Varje år betalar hon tillbaka en fjärdedel av lånet. Vi säger att hon amorterar 2 500 kr per år. Räntan på Malins lån är 7,00%. Hur mycket mer än 10 000 kr kommer Malin att ha betalat banken när hela lånet är återbetalat?

År	Återstående lån	Årsränta	Allt betala till banken
1	10 000 kr	$0,07 \cdot 10\,000\text{ kr} = 700\text{ kr}$	$2\,500\text{ kr} + 700\text{ kr} = 3\,200\text{ kr}$
2	7 500 kr	$0,07 \cdot 7\,500\text{ kr} = 525\text{ kr}$	$2\,500\text{ kr} + 525\text{ kr} = 3\,025\text{ kr}$
3	5 000 kr	$0,07 \cdot 5\,000\text{ kr} = 350\text{ kr}$	$2\,500\text{ kr} + 350\text{ kr} = 2\,850\text{ kr}$
4	2 500 kr	$0,07 \cdot 2\,500\text{ kr} = 175\text{ kr}$	$2\,500\text{ kr} + 175\text{ kr} = 2\,675\text{ kr}$
Summa:		1 750 kr	11 750 kr

Malin har betalat banken 1 750 kr i räntekostnader. Det motsvarar 17,5% mer än det belopp hon lånade.

2312 Teo tar ett lån på 5 000 kr. Lånet ska betalas tillbaka på 2 år. Amorteringarna sker med lika stora belopp varje kvartal.

- Hur många amorteringar ska han göra första året?
- Hur många amorteringar ska han göra totalt?
- Hur stor är varje amortering?

2313 Hilda har ett lån på 75 000 kr. Lånet ska återbetalas på 5 år med lika stora amorteringar varje månad.

Hur stor är amorteringen per månad?

2314 Linus har en kontokortsskuld på 2 000 kr som ska amorteras med lika stora belopp på fyra månader. Månadsräntan är 2%.

Hur mycket ska han betala efter en månad?

2315 Helena och Josef lånar 180 000 kr för att renovera sin lägenhet. Amorteringstiden är 6 år och de ska göra en avbetalning varje kvartal. Årsräntan på lånet är 3,95%.

- Hur stor är varje amortering?
- Hur stor är summan av de belopp som ska betalas till banken vid första inbetalningen?

2316 Ett lån på 30 000 kr ska amorteras med tre lika stora belopp på tre år. Räntan är 5,20%.

a) Rita av och fyll i tabellen.

År	Återstående lån	Årsränta	Allt betala till banken
1	30 000 kr		
2			
3			

b) Vilket totalbelopp ska betalas till banken?

2317 När Jesper köper en storbilds-TV som kostar 15 000 kr får han ett erbjudande att dela upp betalningen på 5 år. Varje år ska han betala tillbaka en femtedel av lånet. Räntesatsen är 5,75%.

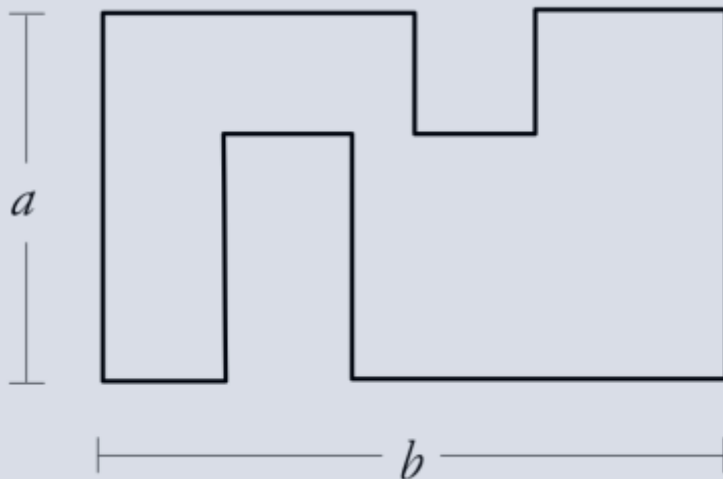
- Hur mycket ska Jesper betala till banken efter det första året?
- Hur mycket ska Jesper betala till banken efter det andra året?
- Hur mycket mer kommer TV:n att kosta honom om han köper den på avbetalning jämfört med om han köper den kontant?
- Hur många procent dyrare blir TV:n på avbetalning?

Foto: Johan Sidenwall



Problemuppgift - skapa lösningsmetod

Vilket av följande uttryck motsvarar figurens omkrets?
 $a + b$ $2a + 2b$ $3a + 2b$ $3a + 3b$ $4a + 2b$
Motivera ditt svar i figuren och i ditt block.

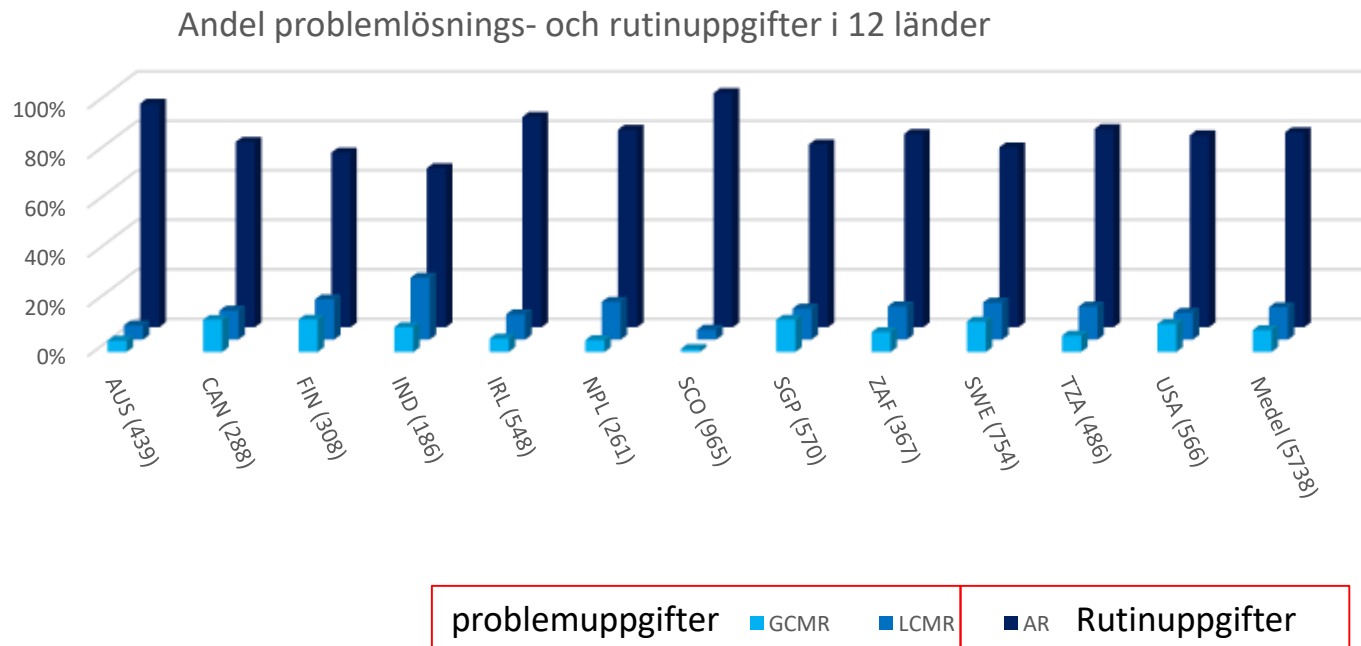


$$x + 54 = 96$$

Problemuppgift

En uppgift där uppgiftslösaren inte känner till lösningsmetoden.

Internationell läroboksanalys



Resultat

- Relativt lika fördelning
- Mest problemuppgifter bland de svårare uppgifterna

(Jäder m fl, 2020)

Orsak 1

Den typ av uppgifter som elever möter triggas sällan
elever att skapa lösningsmetoder

Lärarens hjälp kan stjälpa

$$\frac{x}{6} = 5$$

$$\begin{aligned}\frac{x}{6} &= 5 \\ x &= 5 \cdot 6 \\ x &= 30\end{aligned}$$

”flytta över 6:an
och byt tecken”



(Feka, Andersson, 2021)

Orsak 2

Sättet som läraren och hjälper elever och även hur elever hjälper varandra leder inte till att elever behöver skapa lösningsmetoder i någon större utsträckning.

Uppfattningar hindrar lärande

1. Det finns bara ett rätt sätt att lösa matematikuppgifter på – vanligtvis senaste regeln som läraren gått igenom med klassen.
2. Vanliga elever kan inte förvänta sig att förstå matematik. De förväntas endast behöva memorera och använda vad de har lärt sig mekaniskt och utan att förstå.
3. Matematik är något man ägnar sig åt ensam.
4. Elever som har förstått den matematik som de arbetar, med kommer att kunna lösa alla givna uppgifter på fem minuter eller snabbare.
5. Den matematik som lärs ut i skolan har lite eller inget att göra med den riktiga världen.

(Schoenfeld, 1992)

- Jag vet bara hur man gör om det är vanliga figurer

- Sånt här kan inte jag!

- Jag är osäker när jag måste tänka annorlunda

Orsak 3

Elevens uppfattningar av vad som är matematik och deras inställning till deras förmåga, gör att det väljer att inte skapa lösningsmetoder

Kort bensträckare

5 minuter...

Orsaker till ytligt lärande:

1. Uppgifterna
2. Lärarens hjälp
3. Elevers (negativa) uppfattningar om matematik

Åtgärd 1 - bestäm syftet med uppgifterna

Lära sig ny matematik

Amina äter $\frac{1}{4}$ pizza. Anna äter $\frac{1}{2}$ pizza. Hur mycket pizza har de tillsammans ätit?

Träna metod

NIVÅ ETT

Beräkna

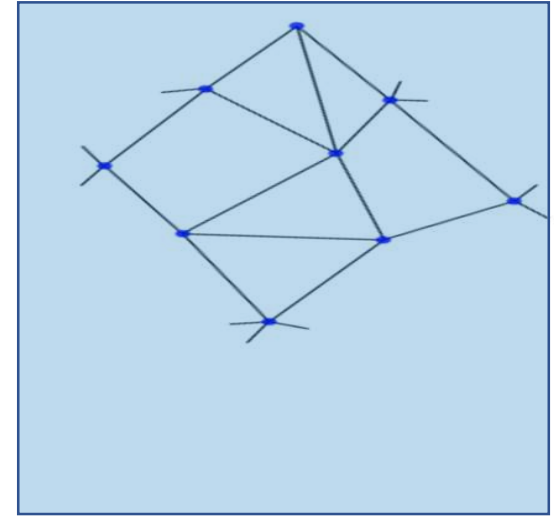
1 a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$	b) $\frac{2}{5} + \frac{7}{5}$	c) $\frac{8}{3} - \frac{4}{3}$
2 a) $\frac{6}{15} + \frac{2}{15}$	b) $\frac{13}{17} - \frac{4}{17}$	c) $\frac{3}{7} + \frac{4}{7}$
3 a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	b) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$	c) $\frac{7}{10} - \frac{2}{5}$
4 a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$	b) $\frac{1}{12} + \frac{1}{3}$	c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

(Cederqvist m fl., 2012)

Åtgärd 2- Lärarens hjälp: stödja inte lotsa

- ➔ Hur beräknas vinkelsumman i en månghörning?
- ➔ Varför kan det inte finnas två räta vinklar i en triangel?
- ➔ Kan en triangel ha två trubbiga vinklar? Motivera.
- ➔ Om du känner värdet av en vinkel i en likbent triangel, kan du då räkna ut storleken på de övriga? Motivera.

242 GEOMETRI 7.1 VINKLAR OCH TRIANGLAR



(Szabo m. fl, 2012)

Ansträngning och ansvar

Ställa undersökande frågor

- Stödja genom frågor
 - **Hur?**
 - **Varför?**
 - Efterfråga de **matematiska argumenten**
- Eleven ges **agens**

Nivå 0: Rätt/fel frågor. Korta elevsvar. Läraren kan också ge svaren.

Nivå 1: Frågor som till viss del efterfrågar elevernas tänkande. Läraren kan fylla på en förklaring. Eleverna ger korta beskrivningar av deras tänkande utifrån lärarens frågor.

Nivå 2: Läraren ställer undersökande frågor för att mer förstå elevernas tänkande. På eget initiativ djupar eleverna sina svar. Eleverna börjar försvara sina svar.

Nivå 3: Läraren följer noggrant elevens svar. Eleven försvarar och motiverar sitt svar med endast lite stöd av läraren.

(Hufford, Fuson & Sherin, 2014)

Produktiv ansträngning och formativ återkoppling

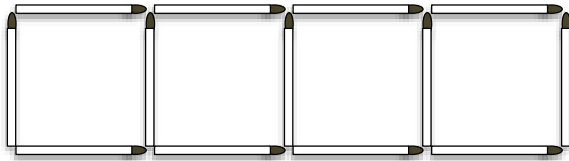
- Hjälپ eleverna att inse att **inte kunna och fel är en del av inlärningen**
- **Tolka studentens tänkande** för att bedöma vad de kan och vad de behöver hjälp att med
- Fatta i-stunden-beslut om hur du ska **återkoppla** till eleverna med frågor och uppmaningar som undersöker, stödjer och kopplar framåt (mot nya kopplingar)

Uppgift

Alt 1: Beräkna vinkelsumman i en månghörning?

Alt 2: $106 = 22 + 7 \cdot x$

Alt 3: När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:



Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

Uppg från Jonsson et al (2014)

Diagnosfrågor (kan också fungera som återkoppling)

1. Beskriv med egna ord vad som efterfrågas i uppgiften?
2. Vad har du gjort/tänkt hittills?
3. Hur kommer det sig att du gjort/tänkt så?

Återkoppling

frågor och uppmaningar som undersöker, stödjer och kopplar framåt

Tex.

- Hur kan du använda dig av informationen i uppgiften för att undersöka [det efterfrågade]?
- Skulle du kunna [föreslå lämplig strategi]?
- Kan du övertyga mig om att du har rätt?

Uppgift –två och två

- Välj tillsammans *en* av uppgifterna ovan
- En "elev" - som inte klarar att lösa uppgiften (lotsas att du inte kan lösa uppgiften)
- En "lärare" - som ger eleven hjälp (ge den hjälp som du brukar ge)
- Ingen gemensam redovisning efter

Ja, ok... men hur?

Lärare behöver vara i en ständigt lärande organisation

- Lärare har svårt att förändra undervisningen om man inte ges goda förutsättningar för det.
(Hiebert, 2003)
- Det kan handla om att få tillräckligt med tid till utvecklingsarbete, men även ämnesspecifikt kunskapsstöd från forskning och beprövad och erfarenhet samt möjlighet att göra utvecklingen tillsammans med kollegor och med *min skolas* behov.
(Desimone, 2009; le Fevre et al., 2020)
- Utvärdering av Matematiklyftet visade att undervisningen förbättrades under det år som skolornas matematiklärare deltog i matematiklyftet, men denna förbättring planade ut året efter lärarna deltagit matematiklyftet
(Österholm m fl., 2016)
- Det är svårt att omsätta innehållet i en fortbildning till en förändrad undervisningspraktik
(Schneider & Plasman, 2011; Stein et al., 2008)

Tack

Tid för frågor



www.diva-portal.org, "johan sidenvall 2019"

<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-157557>

johan.sidenvall@umu.se
johan.sidenvall@hudiksvall.se