Lyssna på felen

Matematikbiennalerna är stor källa till kunskap och inspiration för matematiklärare på alla stadier. Man kan tycka att varje matematiklärare någon gång under sin karriär borde få delta. Tyvärr är det väldigt få förunnat. De som kommer får ta del av en gigantisk fortbildning med ett smörgåsbord av föreläsningar och workshops organiserade i olika spår efter skolform och årskurser och i mer innehållsliga teman. Deltagarna kan välja fritt och antagligen väljer de flesta sitt eget spår och får fördjupa sig i olika ämnesområden. Det kan också vara nyttigt att hålla sig till ett visst tema och byta spår så att man får bekanta sig med vad man gör inom samma innehållsliga område på stadierna under och över det egna stadiet. Möten mellan lärare på de olika stadierna kring undervisning inom samma område ger större kontinuitet för eleven.

Att börja med algebra tidigt

Under biennalen 2020 valde jag att besöka föredrag inom några få teman men på olika spår. Ett av föredragen handlade om hur man kan utveckla algebraiskt tänkande hos elever i årskurs 1–3. Tanken att utveckla algebraiskt tänkande hos så unga elever kan i mångas ögon ses som problematiskt. Algebra är ett område inom skolmatematiken som dras med stora svårigheter. Jag själv ansåg under min tidiga karriär som lärare att man borde vänta till gymnasieåldern för att uppnå mognaden för området. Det är en åsikt som jag skäms för idag. Tvärtom! Orsaken till elevernas svårigheter att anamma algebraiska tankar var snarast bristande förberedelse. Man hoppade huvudstupa in i en färdig produkt och introducerade manipuleringsregler. Istället går det bra att redan för elever i låg ålder lägga upp en undervisning där mönster och regelbundenheter blir synliga och eleverna får formulera sig muntligt i generella termer.

Besvärlig åhörare

Under ett föredrag togs det upp hur man med utgångspunkt från elevernas upptäckter kan gå till generaliseringar. Kommutativitet för addition är exempelvis en lämplig upptäckt som elever i den aktuella åldern kan få uppleva och formulera. En av föreläsarna nämnde att kommutativa lagen gäller för addition och multiplikation men varken för subtraktion eller division. Då hördes en spontan röst med ton av förvåning bland åhörarna: ”Inte för subtraktion?” Beskedet kom omedelbart: ”Nej!”, varpå frågeställaren ställde sig upp i färd med att gå mot tavlan för att ge sin syn på saken. Han hann inte ta fler än två steg innan han blev tillrättavisad av en dam bland åhörarna med orden: ”Jag vill lyssna på föreläsarna.” Tillrättavisningen var utförd i en mycket skarp ton och jag kan tänka mig att resten av tiden kändes som en plåga för den unge mannen vars åsikter inte stämde med föreläsarnas.

Efter föreläsningen sökte jag upp den unge personen dels för att beklaga det obehagliga bemötandet som han utsattes för och dels av nyfikenhet för vad han ville säga. Då sade han att minus tre minus fem är minus åtta och minus fem minus tre är ju också minus åtta. Jag hittade en servett och lät honom skriva det. På pappret stod det snart $-3-5=-8$ samt $-5-3=-8$ och därefter $-3-5=-5-3$. Jag berättade för honom att minustecknet kan ha olika uppgifter och bland dessa finns operationstecken för subtraktion och tecken för att indikera att ett tal är negativt. Tyvärr sammanblandas dessa med ödesdigra konsekvenser för dem som ska lära sig matematik. Jag visade honom att sammanblandningen kan undvikas genom att tydligt notera med hjälp av parenteser vilka tal som är negativa. Istället för att skriva $-3-5$ kan man skriva $(-3)-5$. Vi tittade därefter på följande likhet $(-3)-5=5-(-3)$. Den unge mannen insåg snabbt att likheten *inte* gäller i det här fallet. Han tackade mig och förhoppningsvis blev hans självkänsla något bättre.

Vad beror missuppfattningen på?

Kanske är du lärare på högstadiet eller gymnasiet. Antagligen berör du negativa tal i din undervisning. Hur tolkar du då det första minustecknet i uttrycket $-3-5$? Tolkar du det som subtraktionstecken eller som ett tecken för att indikera ett negativt tal? Är det ett subtraktionstecken borde det stå $0-3-5$ och indikerar det ett negativt tal borde det stå $(-3)-5$. Har du någonsin diskuterat skillnaden med dina elever?

När negativa tal introduceras går det bra att använda sig av subtraktioner där minuenden är mindre än subtrahenden. För att lägga in det i en för eleverna bekant kontext tar man exempel som handlar om temperaturändringar. En sådan fråga skulle kunna vara ”Vad kommer termometern att visa om temperaturen sjunker med 7 grader från 3 °C?” Man frestas då också att utgå från temperaturer med negativa värden på Celsiusskalan. Det är då det uppstår sammanblandning med de två nämnda betydelserna av minustecknet.

Det viktiga är att skilja på fasen att *generera* negativa tal och på fasen att kunna *operera* på dem. Det är en sådan fallgrop, antagligen grävd av en matematiklärare på högstadiet, som den modige mannen ramlat i. Det var bra att han vågade ifrågasätta föreläsarnas påstående. Han var observant och jag tror att många elever skulle kunna komma till samma slutsats om kommutativa lagen hade diskuterats på lektionerna. Bruket att notera negativa tal med parenteser kommer ofta senare. Syftet verkar då vara att skilja två tecken från varandra snarare än att markera att talet är negativt. Det är vanligt att elever hoppar över dessa parenteser, vilket antyder att parentesernas funktion upplevs som dunkel.

Temperaturer och pengar

Jag har i många år undervisat studenter på lärarutbildningen som utbildas till att bli lärare för årskurs 4–6. Jag brukade säga till dem att händelser på termometer är utmärkta för att generera negativa tal men inte för att operera på dem. Då de uttryckte förvåning frågade jag hur man med hjälp av termometern kan tolka uttrycken $5+(-3)$ och $(-7)-(-4)$. När jag inte fick något omedelbart svar föreslog jag att vi kunde förflytta oss till en ekonomisk kontext och tolka det som att man har 5 kr på fickan och en skuld på 3 kr i det första fallet och att en del av en skuld på 7 kr annulleras med 4 kr i det andra fallet. Då tyckte en student att man visst kunde tolka uttrycken med hjälp av termometern eftersom ”Det är skillnad på plusgrader och minusgrader”. Studenten uppfattade nog minusgrader och plusgrader som olika enheter. Att de uppfattas som olika enheter skulle kunna bero på att i väderleksrapporter i vårt land säger man ”tre minusgrader” medan i exempelvis Tyskland uttrycks samma som ”minus drei Grad”. Den stora stötestenen med temperaturer är att tolkningen av addition och subtraktion som att temperaturen ökar eller sjunker inte är begriplig om det ska öka eller sjunka med minusgrader.

Ett annat exempel inom samma problemområde upptäckte jag när jag fick en ny elev i årskurs 8 som skulle beräkna $(-3)+(-4)$. Då hon uppgav att svaret var 7, frågade jag henne hur hon tänkte. Hon måste ha uppfattat min fråga som ett påhopp och svarade med hänvisning till vad hon fått lära sig: ”Så räknade vi hos min förra lärare. Lika tecken blir plus.” Det var inte enkelt att få eleven på rätt kurs. Situationen skulle nog inte uppstå om den forna läraren hade bemödat sig att tolka liknande uttryck i stället för att formulera regler som lätt kan misstolkas av elever.

Formuleringar av typen ”lika tecken ger plus” och ”olika tecken ger minus” finns det gott om i omlopp på de flesta matematiklektioner. Frågorna är hur de förstås av elever och hur lång deras räckvidd är i ett tidsperspektiv.

Det impotenta talet 0

Jag vill ge två exempel på situationer där elever lär sig regler utan förståelse.

Det första exemplet rör division med 0. Jag betvivlar inte att det i de flesta klassrum råder förbud mot att dividera med 0 kungjort av läraren. I en del andra länder finns rim i avskräckande syfte i stil med: ”Inte ens ett troll kan dividera med noll.” Ändå är det många vuxna som skulle ange 6 som resultat av divisionen 6 dividerat med 0 med motiveringen: ”Man delar ju inte.” Elever som tidigt fått fundera över innehållsdivision skulle lätt inse att 0 får plats i 6 oändligt många gånger. Och i relation till det inversa räknesättet, multiplikation, så skulle de inse att det inte finns något tal som multiplicerat med 0 ger 6.

Det andra exemplet handlar om potenser med exponenten 0. Jag brukade fråga mina studenter vilket resultat man får om man upphöjer 2 till 0. Jag skrev även 2^0 på tavlan. Oftast fick jag förslagen 0 eller 2. På min fråga om jag kunde få fler förslag kom även 1. Fler förslag än så kom aldrig. Studenterna var alltid överens med mig om att högst ett av svaren kunde vara rätt, så medelst handuppräckning fick de ansluta sig till något av förslagen. Grupperna bakom 0 och 2 var alltid signifikant större än bakom 1. När jag frågade om vi kunde bestämma det rätta svaret genom en demokratisk omröstning ansågs det inte vara en bra metod. Istället plockade vi fram motiveringar för de olika förslagen.

- Likheten $2^0 = 0$ motiverades antingen med en felaktig uppfattning av potenser där 2 multiplicerades med 0 eller med att det inte fanns någonting efter likhetstecknet så det måste vara 0. Resonemanget bygger på att $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ och $2^2 = 2 \cdot 2$ och $2^1 = 2$ så alltså är $2^0 =$ ”ingenting”, det vill säga 0.
- Likheten $2^0 = 2$ motiverades av att man inte gör något med 2. Ibland kunde någon från de andra grupperna blanda sig i med argument som att $2^1 = 2$ och då verkar det konstigt att också $2^0 = 2$.

- Likheten $2^0 = 1$ motiverades oftast på basis av inlärda regler som att alla tal upphöjda till 0 ger 1, eller tidigare auktoriteter såsom att ens lärare sagt att man alltid gör så. Då sade jag att $2^0 = 13$. Ingen trodde på det trots mitt argument att jag i viss mening står över matematiklärare; jag är ju lärarutbildare. Min förhoppning var att studenterna skulle inse att argumentet *min lärare säger så* inte är hållbart. Endast i ett fall fick jag höra en motivering baserad på potenslagar och en gång att när man sänker exponenten med 1 så halveras tvåpotensen.

Den lilla gruppen som valde $2^0 = 1$ var någorlunda säkra på sin sak, men bland de övriga grupperna uppstod en osäkerhet och en önskan att få veta vilket som var rätt. Jag ville förstås inte ge dem ett svar direkt. Alla hade nog fått det redan i skolan och flertalet hade glömt det och försökt tolka uttrycket på sitt eget sätt. Istället brukade jag ta ett A4-ark och vika det på mitten. Jag frågade hur många delar pappret var vikt i. Jag fortsatte vika på mitten ett par gånger till och fick följande svar: 2, 4 och 8. Dessa är ju tvåpotenser där exponenterna anger antal vikningar. Exponenten 0 betyder att vi inte ska vika och alltså har endast en del. Då kunde någon konstatera att det måste gälla alla andra tal. Förvisso gäller det de flesta tal. Man kan ju vika pappret i tre delar upprepade gånger eller i ett annat antal delar. Därefter lät jag studenterna betrakta följande:

$$\begin{array}{rr} 2^0 = 1 & 0^2 = 0 \\ 3^0 = 1 & 0^3 = 0 \\ 7^0 = 1 & 0^7 = 0 \\ 13^0 = 1 & 0^{13} = 0 \end{array}$$

Då uppstår frågan i vilken kolumn man ska placera 0^0.

Reflektioner

Vad kan vi lära oss av detta? Undervisning bör inte vara inriktad på resultat som bara syns på ett prov kort tid efter att man behandlat området. Och även om man minns regler av olika slag så är det inte kunskap av något större värde om man inte är i stånd att motivera varför reglerna gäller. Det är ofta bara en liten andel vuxna som minns dessa regler och flertalet gör egna tolkningar. Ett sätt att åstadkomma mer hållbara kunskaper är att ersätta det kvantitetsinriktade räknandet med kvalitetsinriktade diskussioner.

En annan viktigt sak som vi kan lära oss är att inte tysta ner elever när de vill ta upp något som har med lektionen att göra. Jag hoppas att den barska damen inte uppför sig på samma sätt mot sina elever, när de svarar fel, som hon gjorde mot sin kollega. Hon gick själv miste om viktig kunskap rörande en specifik missuppfattning. Sådan kunskaper är av stor vikt för lärare och gör det möjligt att revidera undervisningen så att sådana missuppfattningar inte uppstår.

LITTERATUR

Kilhamn, C. (2020). *Från, med och mellan – små ord med stor betydelse.* Nämnaren 2020:1.

Månsson, A. (2019). *Minus av minus.* Nämnaren 2019:4.