Åtta barn delar på nio kakor

Dagens vandring leder oss in i ett klassrum i USA med elever i årskurs 4. Episoden i klassrummet är hämtad från en vetenskaplig artikel av Elham Kazemi och Deborah Stipek. Fröken Carter har undervisat klassen i två timmar om addition av bråk. Nu får eleverna följande uppgift:

> Det har kommit 8 barn på kalaset. Det finns 9 chokladkakor (brownies) som de ska fördela rättvist emellan sig. Hur mycket får varje barn?

Här är samtalet som följer mellan eleverna Sarah och Jasmine och deras fröken:

Sarah: De första fyra kakorna, vi skär dem i halvor.
[Jasmine ritar fyra kvadrater som hon delar i halvor.]

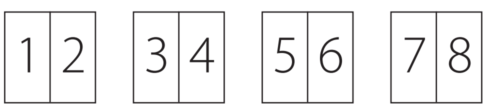
Fr Carter: Nu när du förklarar, kan du förklara varför du delar dem i halvor?

Sarah: För att när du delar dem i halvor blir det … åtta halvor.

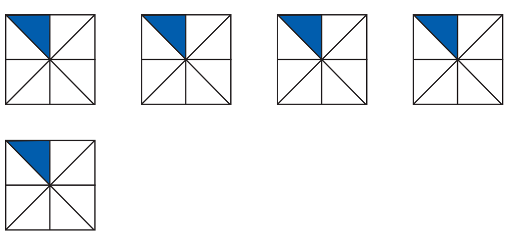
Fr Carter: Åtta halvor. Vad betyder det om det finns åtta halvor?

Sarah: Då får varje person en halva.

Fr Carter: Okej, att varje person får en halva.
[Jasmine numrerar halvorna 1–8.]



Sarah: Sedan är det fem kvadrater [kakor] kvar. Vi delade dem i åttondelar.



Fr Carter: Okej, så ni delade dem i åttondelar. Kan ni säga varför ni valde åttondelar?

Sarah: Det är lättast. Därför att då får var och en … varje person får en halv och … [viskar till Jasmine] Hur många åttondelar?

Jasmine: [Viskar till Sarah] Fem åttondelar.

Fr Carter: Jag visste inte varför ni gjorde det till åttondelar. Jag ville bara veta varför ni valde åttondelar.

Jasmine: Vi valde åttondelar därför att då, om vi gjorde åttondelar, skulle varje person få varje åttondel, jag menar en åttondel av varje kaka.

Fr Carter: Okej, en åttondel av varje kaka. Kan ni bara, ni behöver inte numrera dem, men bara visa oss vad ni menar med det? Jag hörde orden, men ...

Jasmine: Person nr 1 skulle få detta ... [pekar på en åttondel.]

Fr Carter: Jaha, från varje kaka.

Sarah: Från varje kaka får en person en åttondel.

Fr Carter: Okej. Så hur mycket fick de var om de fick lika stor andel?

Flickorna: De fick $\frac{1}{2}$ och $\frac{5}{8}$.

Fr Carter: Vill ni skriva det ovanför uppgiften så jag kan se vad ni fick? [Jasmine skriver $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$]

Fr Carter: Okej, så det är vad ni gjorde. Så hur mycket blir det totalt?

Jasmine: Det är $1\frac{1}{8}$ eller $\frac{6}{8}$.

Därefter följer ett samtal där läraren försöker få flickorna att reda ut frågan om $1\frac{1}{8}$ är detsamma som $\frac{6}{8}$. Det klarar de ut så småningom. I artikeln kommenteras inte den snabba summeringen av $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ till $1\frac{1}{8}$. Jag undrar hur Jasmine kom fram till det så lätt? Bra gjort.

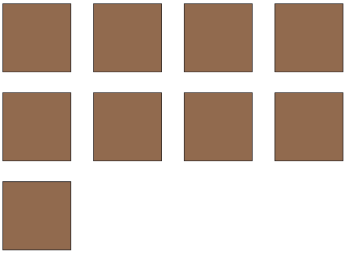
Vad är det eleverna lär sig?

Det forskarna ville undersöka var på vilket sätt praktiken i klassrummet skapar möjligheter för att eleverna ska utveckla sin begreppsliga förståelse. Lärarna verkar i ett projekt med så kallat inquiry-baserat lärande, med andra ord ett undersökande och utforskande lärande. Avsikten är att uppnå en djupare förståelse av matematiska idéer, relationer och begrepp. Forskarna menar att ett högt tryck från läraren för att nå begreppslig förståelse bland annat innebär att det matematiska tänkandet har som mål att förstå relationer mellan strategier och att utveckla alternativa strategier.

Episoden måste har varit lyckad ur lärarens perspektiv eftersom eleverna kom fram till att de behövde addera en halv och fem åttondelar. En bra övning i samband med att de undervisas om addition av bråk. Men om vi ser på händelsen från matematikens håll, är den då lyckad? Min hypotes är att om en grupp med 8 elvaåringar får ett fat med 9 kakor och blir uppmanade att dela dem rättvist så skulle de nog först dela ut en hel kaka till var och en och så dela den sista kakan i åtta delar. Nio är trots allt mer än åtta. I den metod som Sarah och Jasmine valde med fem kakor delade i vardera åtta delar blev det nog mest kaksmulor på skärbrädan.

Det är givetvis viktigt att eleverna får lov att visa hur de tänker och löser uppgiften, och i detta fall blev lösningen dessutom korrekt. Och fröken Carter försöker verkligen ställa frågor och följdfrågor så att hon kan följa elevernas tankegång. Men jag vill påstå att läraren undanhåller flickorna en möjlighet att lära sig något viktigt om matematiken om hon inte också lockar dem att finna den enkla och rättframma lösningen. Det är fullt möjligt att fröken Carter förde ett samtal om en enklare lösning med flickorna och att artikelförfattarna inte hade möjlighet att ta med det i rapporten. Jag har kontaktat Elham Kazemi och frågat om saken. Det visar sig att läraren inte tog upp frågan om en enklare lösning.

Vi kan fundera över varför flickorna börjar med att dela fyra kakor i halvor. Det verkar vara inspirerat av en tidigare uppgift att dela 12 kakor på 8 personer. Där uppstod behovet att dela fyra kakor i halvor. Det kan även ha varit inspirerat av lärarens sätt att illustrera problemet. När problemet introducerades hade hon ritat nio kvadrater, en för varje kaka, placerade med fyra på första raden, fyra på andra raden och en på tredje.



Det kan ha lett flickorna till att först hantera de fyra kakorna på rad ett. Och eftersom de nyss sett delning i halvor var det en användbar tanke. Men som vi ser blir följden att de gör en riktig lösning som är omständlig och i praktiken oanvändbar i fallet kakor.

Vi kan också undra varför flickorna inte valde att dela även de fyra kakorna på andra raden i bilden i halvor. Det hade åtminstone blivit färre kaksmulor. Och om de delar fem kakor i åttondelar, varför delar de inte alla nio kakorna i åttondelar? Så får alla varsin hög kaksmulor.

Här är många frågor om vad det egentligen är som utlöser elevernas sätt att gå till väga. Fröken Carter kunde ha inlett ett samtal om alternativa strategier med att fråga just varför de inte delade de fyra kakorna på rad två i halvor och delade ut en halva till var. Därifrån hade det nog inte varit svårt att komma fram till en ännu enklare lösning. Ett annat sätt att få Sarah och Jasmine att finna den enklaste lösningen vore kanske att ge dem ett fat med nio kakor att dela ut. Om läraren vill ha ett problem med realistisk kontext är det kanske lika bra att genomföra uppgiften på riktigt.

Hur kan det komma sig att flickorna utan att tänka efter eller räkna vet att $\frac{1}{2} + \frac{5}{8}$ är $1\frac{1}{8}$. Det frågade jag också Kazemi om. Hon berättar att innan dialogen utspinner sig har flickorna arbetat igenom uppgiften i par. Och så väljer läraren ut de två flickorna att redovisa sin lösning för hela klassen. De har alltså haft möjlighet att göra den beräkningen medan de förberedde sig. Hur uträkningen gick till får vi dock inte veta i artikeln.

Lärarens ansvar att välja problem

En annan fråga är om läraren valde ett lämpligt problem för det hon ville att eleverna skulle öva på. I det här fallet kan man nog säga att uppgiften inte var den bästa tänkbara. Nog för att eleverna kom fram till behovet att göra en addition av bråk, men den additionen var i själva verket onödig för att lösa uppgiften. Det är en viktig och grannlaga uppgift för lärare att välja ut bra övningar till ett visst moment i undervisningen. Och läroböckernas förslag är inte alltid så väl varierade.

Finns det en sensmoral i den här berättelsen? Ja, kanske det rentav finns två? För mig är en den att jag som lärare inte får glömma vad som är viktigt i matematiken: *att lösa problem enkelt och elegant*. Om elevernas lösningar inte blir sådana direkt måste jag som lärare hjälpa dem att se att det finns andra vägar till lösningen som är lättare och vackrare. Om jag inte gör det undanhåller jag för eleverna en möjlighet att lära sig matematik med kvalitet. Och att lära sig vad som är karaktäristiskt för god matematik. Eugen Wigner talar om matematikens orimliga eller omåttliga effektivitet, och den vill vi gärna att eleverna ska få uppleva.

En andra sensmoral är att jag som lärare har ett stort ansvar för att välja uppgifter som passar för just det jag vill att mina elever ska öva på. Då måste jag tänka mig in i hur eleverna kan förväntas reagera och vilka alternativ till lösningar som kan dyka upp. Det kräver en väl utvecklad känsla för hur elever tänker och kunskap i matematikdidaktik.

Här kommer en utmaning till alla läsare som är intresserade av matematikdidaktisk forskning. Pröva min hypotes om brownies: En grupp med 8 elvaåringar kommer oftast att dela 9 brownies rättvist i gruppen genom att först ge var och en en hel brownie och därefter dela den sista i åtta lika delar. Här finns en del att bita i. Undersök vilka lösningar som identifieras och frekvensen av dessa. Påverkas utfallet av hur uppgiften presenteras? Pröva till exempel med kvadratiska, rektangulära eller runda kakor, stora eller små kakor, grupperade på olika sätt, kakor som är lätta eller svåra att dela i små delar, olikformade kakor. Är det skillnad i resultat beroende på elevgruppens sammansättning och ursprung? Kan proportionen kakätare till kakor förändras på något sätt för att göra uppgiften mer lämpad för att öva eleverna i addition av bråk? Jag gläder mig redan över att få se resultaten av sådana studier.

LITTERATUR

Grevholm, B. (red) (2012). *Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6*. Studentlitteratur.

Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The Elementary School Journal, 102*(1), 59–80.