PROBLEM AVDELNINGEN

Problem i coronatider

Den enklaste modellen för smittspridning i början på en epidemi är exponentiell tillväxt. Här ska vi jämföra hur fort olika enkla funktioner växer. Speciellt jämför vi upprepad addition med upprepad multiplikation, dvs vi jämför en linjär funktion med en exponentiell funktion. De första problemen kan göras redan i årskurs 4, medan de två sista lämpar sig bäst för gymnasiet.

4354 *Addera igen och igen*
Börja med 0 och addera 2. Addera 2 igen, och igen, och igen, och igen. Nu har du fått 10. Hur många additioner gjorde du? Fortsätt nu, eller tänk ut hur du kan svara på frågorna utan att faktiskt göra alla additioner. Hur många gånger behöver du addera 2 för att få 100? För att få 200? För att få 1000? För att få 1000000?

4355 *Multiplicera igen och igen*
Vi börjar med 1 den här gången (annars blir det bara nollor av alltihop). Multiplicera med 2. Multiplicera med 2 igen, och igen, och igen, och igen. Om du använder en miniräknare kan du trycka på = för att upprepa den senaste operationen. Hur mycket fick du nu? Hur många multiplikationer med 2 behövde du göra för att komma över 10? Hur många för att komma över 100? Över 200? Över 1000? Över 1000000?

4356 *Vika papper*
Ta ett vanligt pappersark och vik det på mitten. Nu har du 2 lager som är hälften så stora. Vik igen. Då har du 4 lager. Hur många gånger behöver du vika för att få 32 lager? Om du hade ett större och tunnare papper, hur många gånger behöver du vika för att få fler än 1000 lager? Går det att göra i praktiken? Uppskatta hur tjockt det vikta pappret skulle bli om du kunde vika 10 gånger. Hur tjockt skulle det bli om du kunde vika 20 gånger?

4357 *Multiplikatorprogrammet*
Skriv ett program som frågar efter ett tal, multiplicerar det med sig självt gång på gång på gång och skriver ut alla produkter (för talet 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 osv). Bestäm själv hur många tal du vill få ut.

4358 *Vilken är snabbast?*
Rita grafer, för hand eller med Geogebra, för de funktioner du räknade i uppgiften *Addera igen och igen:* $a(x) = 2 \cdot x$
Multiplicera igen och igen: $m(x) = 2^x$
(i Geogebra skriver du *2^x)*. Jämför graferna. Vad ser du för trend när x ökar?

4359 *Är kvadrattal snabba?*
Kvadrattal bildas av funktionen $k(x)= x^2$. Hur tror du att den växer jämfört med de andra två? För vilket värde av x är $k(x) = m(x)$? Hur ser graferna ut för större x-värden? (Du kan ändra skalan på y-axeln i Geogebra genom att högerklicka utanför grafen och välja ”x-axel : y-axel 1 : 100".) Ser du en tydlig trend? Jämför med x^3 eller högre exponenter.

4360 *Exponentiella funktioner med olika baser*
Prova att jämföra $m(x) = 2^x$ med andra exponentialfunktioner som har andra tal än 2 som bas, exempelvis: $t(x)=3^x$, $s(x)=10^x$, $h(x)=0,5^x$, $j(x)=1,1^x$, $r(x)=0,9^x$. (I Geogebra används punkt istället för decimalkomma.) Hur skulle du beskriva trenden för de olika funktionerna när x blir större? Vilka liknar varandra, vilka är riktigt olika?

Svar och förslag på lösningar

Den enklaste modellen för smittspridning i början på en epidemi är exponentiell tillväxt då man tänker av varje person som blir sjuk smittar några nya. I mer realistiska modeller vill man även ta hänsyn till inkubationstiden, till hur snabbt man blir frisk igen, till ändrade sociala beteenden rörande exempelvis handhygien och social distansering och till att den som varit sjuk och tillfrisknat blir immun. Om spridningsfaktor är mer än 1 fortsätter antalet att växa. Om spridningsfaktorn blir mindre än 1 minskar antalet sjuka progressivt och epidemin ebbar ut.

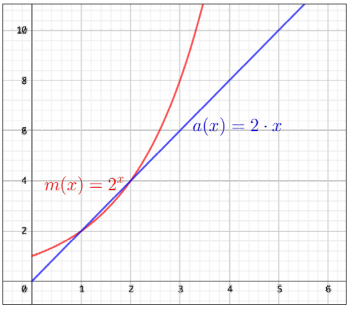
4354
5 additioner ger 10, 50 ger 100, 100 ger 200, 500 ger 1 000 och 500 000 additioner ger en miljon. Gör hälften så många additioner som vad ditt måltal är, helt enkelt.

4355
Du får 2, 4, 8, 16, 32. Efter 4 multiplikationer passerar du 10, efter 7 passerar du 100, efter 8 passerar du 200 och 10 räcker till 1 000. Efter 20 multiplikationer har du passerat en miljon.

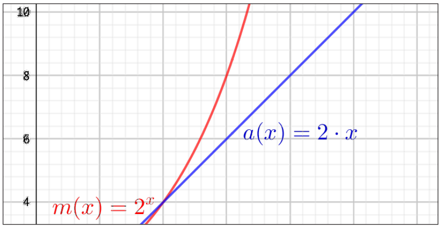
4356
Vik 5 gånger för 32 lager. Efter 10 har du 1024 lager. Om papperet är ca 0,1 mm blir 1024 lager 10,24 cm tjockt. Efter 20 vikningar blir det över en miljon lager, dvs över 100 m tjockt. Det går inte att göra i praktiken. Efter 45 vikningar når pappret till månen och tillbaka.

4357
Programmet ser olika ut beroende på vilket programspråk som används. Den upprepade multiplikationen kodas som en loop. Det finns antagligen en gräns för hur stora och hur många tal datorn klarar av att skriva ut.

4358
Funktionen $a(x) = 2 \cdot x$ växer linjärt, och grafen är en rät linje. Funktionen $m(x) = 2^x$ växer exponentiellt. För små x går det ganska långsamt, för $x = 1$ och för $x = 2$ är de lika varandra, med $y = 2$, respektive $y = 4$, men för stora värden på x växer 2^x väldigt snabbt och i ökande takt.

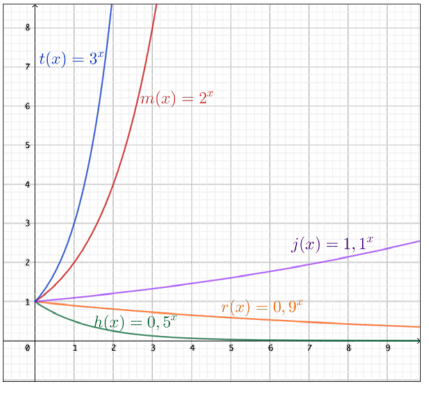


4359
Vi tittar bara på positiva värden av x. Kurvorna går om varandra på flera ställen. För x mellan 0 och 2 är $m(x) = 2^x$ störst, sedan tar $k(x) = x^2$ över fram till $x = 4$, men efter det vinner 2^x tydligt. Det syns väldigt bra från $x = 8$ och uppåt om man ändrar på skalan på y-axeln.



Grafer för potenser med högre exponenter, som x^3, hamnar mellan x^2 och 2^x. De växer ganska snabbt i början men den exponentiella funktionen kommer ikapp och kör om.

4360
Den stora skillnaden är mellan exponentialfunktioner med bas större respektive mindre än 1. Graferna för 2^x och $0{,}5^x$, då både positiva och negativa x tas med, är spegelbilder av varandra med y-axeln som symmetrilinje.



Laura Fainsilber

Se Nämnaren på nätet för länkar till filmer om smittspridning och exponentialfunktioner.