Güner Ahmet & Thomas Lingefjärd

Ett undersökande arbetssätt och problemlösning med GeoGebra

Användningen av IKT i matematikundervisningen blir inte bättre för att det blinkar och låter. Snarare kan elevers arbete med genomtänkta uppgifter under ledning av kunniga lärare ytterligare stärkas av IKT. Här får eleverna på gymnasiet undersöka funktioner med stöd av GeoGebra.

GeoGebra är inte bara ett geometriskt program utan kan med sina möjligheter att representera matematiska uttryck på olika sätt även ge en god inblick i problemlösningssituationer i matematik tvärs över olika matematikområden.

Genom verktyget GeoGebra kan vi också undersöka matematiska påståenden eller hypoteser och se hur dessa håller för förändringar. Ett undersökande arbetssätt leder genom ett större elevengagemang till en bättre förståelse för matematiken som i sin tur gör att eleven tycker att matematiken blir intressant och roligt. Våga utmana eleverna!

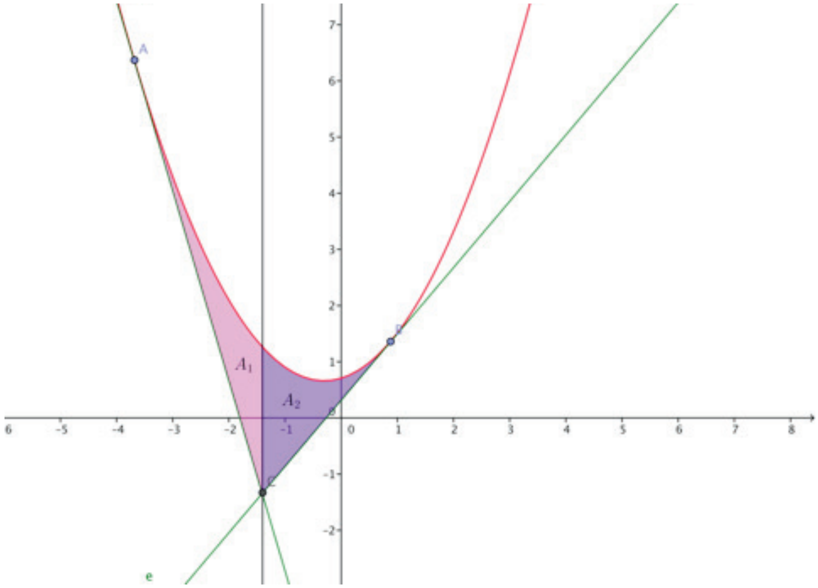
Vi ska här presentera några undersökande aktiviteter som alla är kopplade till funktionsbegreppet på olika sätt och de skulle nog vara ganska besvärliga att genomföra utan digitala verktyg. Begreppet funktion bör finnas inom elevens proximala zon, det vill säga eleven bör veta vad en funktion är. Att ha olika representationer och interna begrepp kopplade till just funktioner är också viktigt för elever som vill bli ingenjörer eller ha matematik som sitt ämnesfält.

Det sätt som GeoGebra representerar funktioners grafer och algebraiska uttryck på gör det lämpligt för ett undersökande arbetssätt inom både geometri och algebra. Dessutom kommer eleverna att bli bättre på att hantera verktyget GeoGebra, något som kan vara en fördel i fortsatta studier inte bara i matematik utan även för andra ämnen. Vi börjar med en generell andragradsfunktion.

> Uppgift 1: Starta GeoGebra och skriv in $f(x) = ax^2 + bx + c$ i inmatningsfältet. Svara ***Ja*** på frågan om GeoGebra ska skapa tre glidare *a, b* och *c*. Parabelns utseende kommer nu att bero på värdena av koefficienterna *a, b* och *c*.

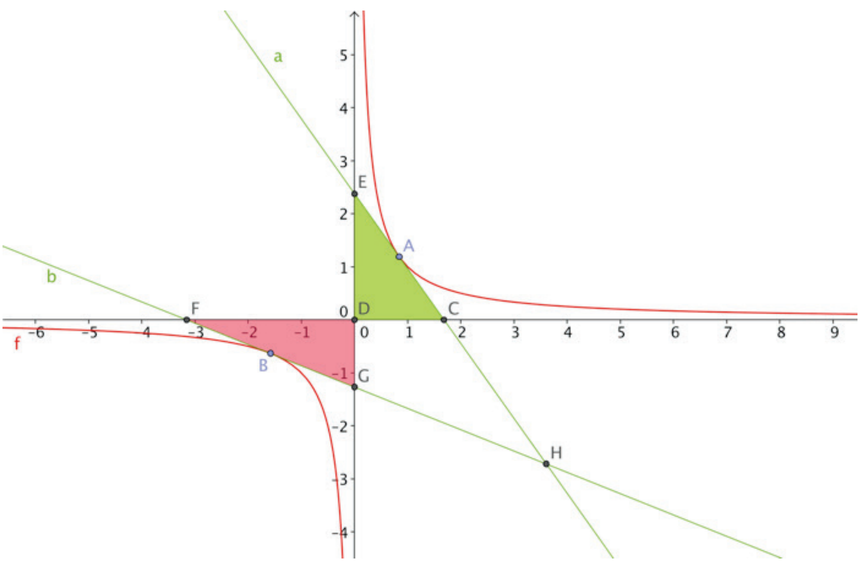
Sätt ut punkterna A och B som två godtyckliga punkter på parabeln – använd verktyget [punkt på objekt]. Skapa därefter linjen *d* som tangenten till parabeln i punkten A, och linjen *e* som tangenten till parabeln i punkten B. De två tangenterna skär varandra i punkten C. Du får C genom att låta GeoGebra markera skärningspunkten mellan *d* och *e*. Linjen *g* går från punkten C och är vinkelrät mot *x*-axeln. Två areor konstrueras enligt figuren nedan. Konstruera figuren med hjälp av GeoGebra och visa att $A_1 = A_2$.

Figur 1: Jämförelse av areor i GeoGebra



Uppgift 2: Funktionen nedan är $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Punkterna A och B är två godtyckliga punkter på funktionen i första och tredje kvadranten. Linjerna *a* och *b* är tangenter till funktionen i punkterna A och B. Tillsammans med koordinataxlarna bildar de två trianglar. Beräkna arean av respektive triangel. Visa att areorna är lika och studera betydelsen av hur vi väljer punkterna A och B. Använd GeoGebra som verktyg.

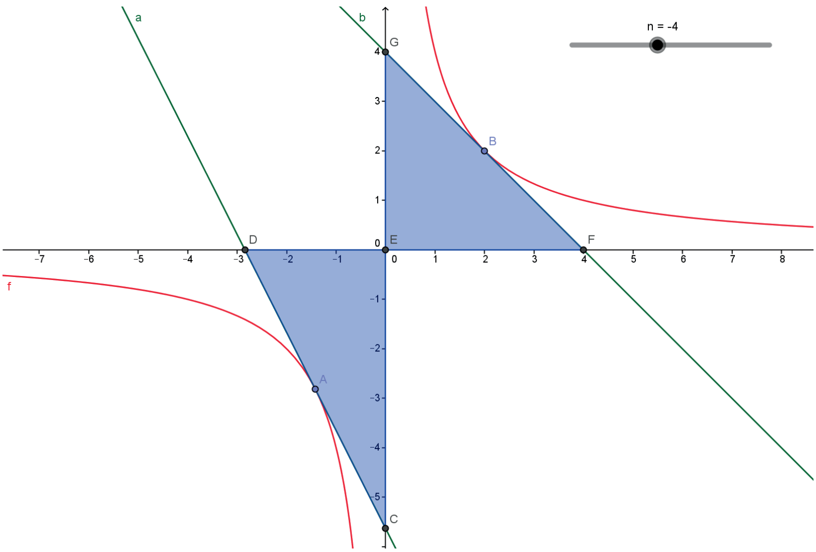
Figur 2: Jämförelse av areor i GeoGebra



Uppgift 3: Nu ska vi studera egenskaper hos en rationell funktion. Skapa en glidare *n* som ingår i mängden hela tal, Z = {. . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .}. Sätt glidaren från -30 till 30 och med ett helt steg i taget.

Konstruera funktionen $f(x) = -\frac{n}{x}$

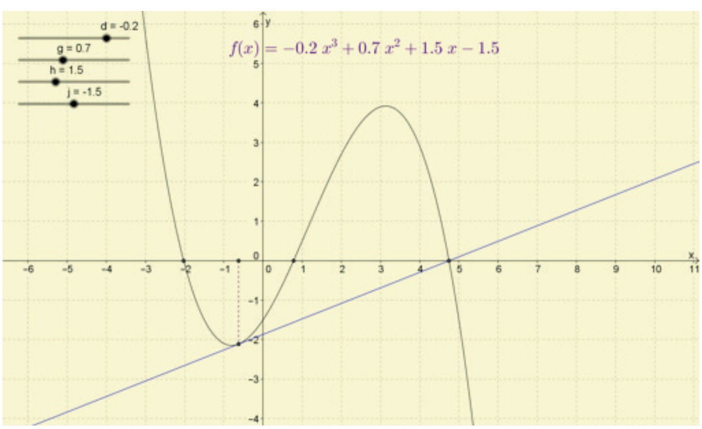
Studera funktionens beteende för olika *n*. Försök finna samband för den sammanlagda arean av trianglarna och *n*. Figur 3 visar situationen och den grafiska representaionen för *n* = -4.



Figur 3: Samband mellan totala arean och n i GeoGebra

Uppgift 4: Antag att *f(x)* är en godtycklig funktion av tredje graden med tre reella rötter *a*, *b* & *c*. Identifiera (*a*+*b*)/2 och dra en tangent till kurvan i punkten *((a+b)/2, f((a+b)/2))*. Går denna tangent alltid genom *c*?

Låt oss undersöka situationen med GeoGebra. Ska vi låta GeoGebra rita ett tredjegradspolynom där de reella rötterna ska vara *a*, *b* och *c* så bör funktionsuttrycket vara $f(x)= dx^3 + gx^2 + hx + j$. Vi kan inte välja *f* som parameter eftersom *f* är benämningen på funktionen eller använda *e* respektive *i*. Vi får följande figur som undersöker ett läge för tredjegradspolynomet. Se figuren.

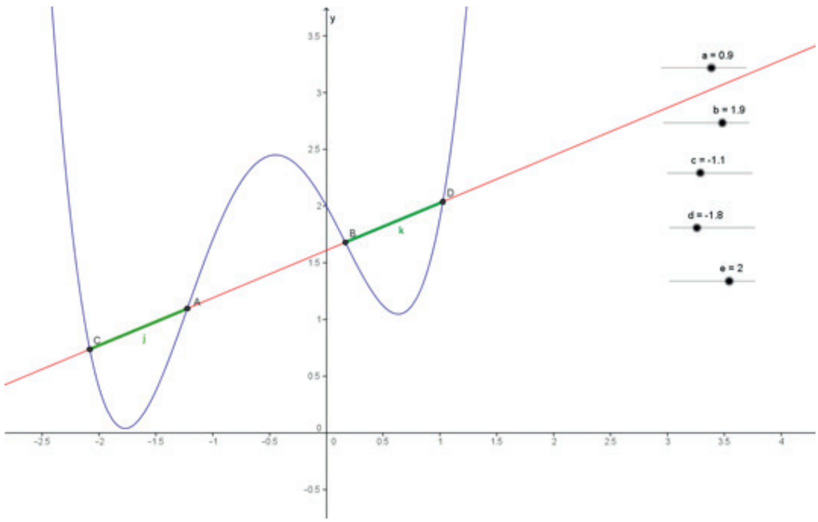


Figur 4: Undersökning av ett tredjegradspolynom i GeoGebra

Kan du bevisa att denna tangent alltid går genom c? Även för andra utseenden på tredjegradsfunktionen?

Uppgift 5: Vår nästa problemställning är kopplad till en fjärdegradsfunktion $f(x)=ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ där a, b, c, d och e är parametrar kopplade till fem glidare. Vi har också låtit GeoGebra markera funktionens inflexionspunkter. Som du säker vet, så definieras inflexionspunkten som en punkt på en kurva, där tecknet för konkaviteten ändras från plus till minus eller tvärtom. Se figuren där vi mäter sträckorna mellan de inflexionspunkter som en funktion har.

Mät förhållandet mellan AB och BD.
Är det konstant för olika värden på a, b, c, d och e?
Känner du igen värdet?



Figur 5: Jämförelse av sträckor i GeoGebra