

Underskattade uppskattningar

I ett pågående forskningsprojekt om numeracitet undersöker författarna elevers olika strategier för att uppskatta antal och storlek. De menar att förmågan att uppskatta är en underskattad förmåga i dagens skola och att det är någonting vi borde ägna mer tid åt redan i lågstadiet.

Tänk dig att du försöker uppskatta antalet kajor i en flock, antalet guppyfiskar i ditt akvarium eller antalet tusenskönor i gräsmattan. Du kan *subitiser*a, alltså uppskatta antal utan att behöva räkna dem. Men den övre gränsen för att subitiserar ligger någonstans i intervallet 5–10 och eftersom du nu ska räkna betydligt fler växter eller djur, så fungerar inte subitisering.

Du kan *räkna*, genom att reducera uppgiften till att tillämpa ett till ett-principen mellan objekt och räkneord och upprepa denna procedur tills det sista objektet har inkluderats. Men, eftersom de kajor och fiskar du ska räkna ständigt rör sig in och ut ur din tänkta gräns mellan räknade och oräknade djur, så tappar du räkningen. Därför fungerar knappast ett till ett-principen denna gång och knappt ens för att räkna antalet tusenskönor då du lätt glömmer vilka du har och ännu inte har räknat.

Du kan *uppskatta* antalet föremål. Det bygger varken på subitisering eller ett till ett-principen. Istället bygger den på att du gör en gissning grundad på kontext, erfarenhet och förnuft, alltså en kvalificerad gissning. Här presenterar vi några strategier som elever i årskurserna 3 och 7 använder för att uppskatta antal liksom även situationer i förskolan där uppskattningar kan förekomma.

Olika strategier för att göra uppskattningar

I en studie lät Louisa Colliander elever i årskurs 3 se en bild med enbart tranbär, så många att det var omöjligt att räkna enligt ett till ett-principen, och elevernas uppgift var att, på valfritt sätt, uppskatta antalet bär.

1. Mer än hälften av eleverna i studien använde sig av att *öгна* – en mindre sofistikerad strategi, som enbart grundar sig på elevernas känsla eller gissning.
2. Resterande del av eleverna använde sig av strategin *del och helhet*, (dela upp och lägga samman), vilket anses vara en mer sofistikerad strategi.

I studien märktes att tredjeklassarna var ovana vid att använda strategin dela upp och lägga samman. De var konsekventa med att dela in bilden i endast två halvor med många tranbär i varje, istället för i fler delar med färre bär i. Detta ledde till att de kraftigt överskattade antalet tranbär i respektive del till

mycket stora tal. Därmed syntes det också att de ännu inte visste att de stora tal de nämnde faktiskt är större än de tror, vilket i sin tur gjorde att eleverna fick svårt att addera de båda antalsuppskattningarna. Det ledde i sin tur till additionsuppskattningar (avrundningar) som befann sig utom rimlighetens gränser. Anledningen till detta resultat har sina naturliga förklaringar. Dels behöver eleverna bygga upp en känsla för större tal, dels behöver de få tydligare undervisning i strategier för antalsuppskattning.

En forskare i Nederländerna, Arthur Bakker, bad elever i årskurs 7 berätta hur de kan uppskatta antalet elefanter som finns med på ett flygfotografi över en savann. Han fann att elever i alla klasser använde följande fyra strategier, med några varianter, för antalsuppskattning. Den första var densamma som tredjeklassarna visade, nämligen att dela in i grupper och uppskatta antalet i varje grupp för att sedan addera. Övriga strategier var:

3. *Räkna en grupp och multiplicera.* Välj ut en grupp med ett bestämt antal och uppskatta hur många sådana grupper det verkar finnas i hela mängden.
4. *Lägg på ett (tänkt) rutnät.* Välj en ruta med vad som ser ut att vara ett medeltal elefanter. Multiplicera detta medeltal med antalet rutor.
5. *Använda en areamodell.* Räkna antalet elefanter på längden och sedan på bredden. Multiplicera dessa antal. Denna strategi är identisk med den metod som Mr Bean (komikern Rowan Atkinson) använder när han räknar får för att somna i sketchen på www.youtube.com/watch?v=kO6tn-at4UQ.

Bakker nämner även strategier som finns omtalade i antika historiska texter från Indien och Grekland, exempelvis för att uppskatta antalet löv på ett träd och antalet deltagande sjömän i ett sjöslag. I dessa båda fall används multiplikationsstrategier och ett exempel på en sådan är att multiplicera antalet löv på en kvist med antalet kvistar på en tunn gren multiplicerat med antalet tunna grenar på en grov grenar etc.

Vi ser att det finns ett flertal strategier för antalsuppskattning och att dessa naturligtvis kan variera med årskurs. Alla dessa strategier kan betraktas som mer avancerade än att enbart tillämpa ett till ett-principen eftersom de inte sällan kräver kontextberoende erfarenhet kombinerat med årskursberoende matematiska strategier. Detta jobb faller på läraren. Uppskattningar nämns i en del lärarhandledningar, men förekommer sällan eller inte alls i läromedel för årskurs 3. Ett exempel på hur läraren kan arbeta är att be en elev beskriva hur hen kom fram till sitt svar på ett sätt som öppnar för diskussioner om vad eleven grundar sitt resonemang på. Under sådana diskussioner kan vi som lärare synliggöra olika tänkbara strategier för antalsuppskattning. I forskningslitteraturen fann Colliander ytterligare två strategier.

6. *Utnyttja en referensmängd.* En referensjämförelse innebär att en mängd jämförs med en annan redan känd mängd. Exempelvis att antalet äpplen som får plats i fruktskålen bör vara färre än antalet plommon, eftersom äpplen är större än plommon.
7. *Skapa ett spann.* Det innebär att man stänger in antalet med en rimlig nedre och övre antalsuppskattning.

För en mer detaljerad beskrivning av dessa strategier, hänvisar vi till Collianders examensarbete. Det är viktigt att poängtera att uppskattning av mängder och mått inte enbart behöver ske på matematiklektionerna, utan vi lärare behöver uppmärksamma användningen av uppskattning även i elevernas vardag, utanför klassrummet.

Uppskatta också på fritids och i förskola

I daglig kommunikation och aktiviteter finns många tillfällen att uppskatta mått och antal. Kanske fritidspersonalen kan hjälpa till med detta? När vi kvantifierar mätetal såsom tid, kan vi säga "några minuter" men vi kan också använda uttryck som "Vi är snart framme" och "Vi kommer strax", vilket innebär ungefärlig kvantifiering. För kardinalitet har vi andra ord, vilket följande samtal mellan två barn i förskoleklass illustrerar:

Adam: Jag har 5.

Eva: Jag har fler!

Adam: Du har ungefär tio.

I denna konversation finns det tre olika aspekter på att kvantifiera antal. Adam inleder samtalet med att ge en exakt kvantifiering. Eva svarar genom att jämföra mängder. Adam avslutar med en antalsuppskattning. Liknande situationer uppstår när vi uppskattar (typiskt fysiska) storheter såsom avstånd, höjd, vikt, temperatur och tid med antingen icke-standardenheter (hästlängder och tummetottsteg) eller standardenheter. I det dagliga språket uttrycker vi ofta ungefärlig mängd med specifika ord och idiomatiska uttryck.

Några funktioner och språkliga uttryck för kvantifiering

<i>Exakt kvantifiering</i>	Ingen, noll, fem, ett dussin, hundra ...
<i>Jämföra</i>	Färre än, fler än ...
<i>Begränsa</i>	Högst/minst 10 stycken, nästan, knappt åtminstone, majoriteten av ...
<i>Approximativ kvantifiering</i>	En handfull, ett fåtal, några, dussintals, massor, massvis, mängder av, hundratals, tonvis*, ungefär, cirka, grovt räknat, nära, i runda tal, i runda slängar ...

* *Ton är visserligen en massenhet, men "tonvis" är ett idiomatiskt och målande uttryck.*

Tabellen visar att det finns ett rikt ordförråd att undervisa om och lära sig när man uttrycker kardinalitet som exakt, jämförande, begränsande och ungefärligt antal. Eftersom dessa uttryck ofta är idiomatiska uttryck och dessutom numeriskt diffusa, så gissar vi att de inte är helt enkla att lära sig för andra-språkelever. Eftersom det är lättare att lära sig i ett sammanhang, så är detta kanske ett skäl att ta hjälp av såväl fritidsläraren som idrotts- och bildläraren för att ta till vara på verkliga situationer där eleverna uppmärksammas på språkliga sätt att uttrycka antalsuppskattning. Men de matematiska strategierna för detta passar nog bäst under matematiklektionerna.

Uppskatta i gymnasimatematiken

Om vi tänker oss den matematik som ingår i studieförberedande gymnasieprogram, så handlar den främst om exakt kvantifiering, exempelvis att med naturvetenskapliga modeller bestämma ett antal eller en storhet. Ser vi däremot till yrkesprogrammets behov, så finns det många situationer där antalsuppskattning hör till yrkesämnen snarare än matematikämnet. Exempelvis när man som butiksföreståndare ska uppskatta hur mycket man bör köpa in av en säsongsvara eller laga till av en färskvara, exempelvis handgjorda smörgåsar. Andra situationer handlar om att bedöma hur lång tid ett arbete tar och hur mycket material (virke, färg etc) det går åt eller hur man lastar en lastbil så att tyngpunkten hamnar lämpligt.

Olika sorters matematisk uppskattning

Våra exempel visar att det finns några olika typer av situationer där man uppskattar kardinalitet och mätetal. Att *räkna* och *mäta* ingår i Alan Bishops indelning av matematiken i sex matematiska aktiviteter (räkna, navigera, mäta, formge, leka och förklara). Att räkna fokuserar kardinalitetsaspekten av ett tal, medan att mäta fokuserar mätetal.

Vi kan kategorisera räkna och mäta dels efter vilka representationsformer som är inblandade och dels efter om det handlar om kardinalitet (antalet enskilda föremål, ett heltal ≥ 0) eller mätetal (antal meter, kg, minuter, negativa temperaturer, ett reellt tal). På grund av dessa olika egenskaper hos tal väljer vi här att redovisa situationerna som två skilda typfall där alternativ a) handlar om att uppskatta kardinalitet och b) om storleksuppskattning.

1. Att byta representationsform i riktningen från konkreta föremål till tal som är matematiska abstraktioner.
 - a) En situation är att ungefärligen bestämma kardinaliteten hos en samling föremål, exempelvis antalet ärtor i en burk.
 - b) En situation är att ungefärligen bestämma en storlek, exempelvis höjden på en byggnad, vikten på ett föremål eller hur lång tid det tar att göra något.
2. Att byta representationsform i riktningen från tal till konkreta föremål.
 - a) Att uppskatta kardinaliteten hos ett abstrakt tal, exempelvis uppgiften "ge mig 100 ärtor".
 - b) Att uppskatta en viss längd, exempelvis genom uppgiften "klipp av 5 meter snöre".
3. Att byta mellan två abstrakta representationsformer. Här blir inte längre kardinalitet och mätetal alltid åtskilda, det beror på elevens inre föreställningar av tal. Är representationsformen abstrakt så kan eleven antingen associera till kardinaliteten eller till mätetalet, exempelvis vid avrundning i aritmetiska beräkningar såsom att $43 + 55$ är "cirka hundra", eller vid placering av tal på tallinjen såsom att sätta ut talet 28 på en tallinje som är graderad endast med talen 0 och 100.

Matematikdidaktisk forskning om uppskattning

I en litteraturgenomgång fann vi att vid sidan av klassrumsexemplen ovan och uppdelningen i olika sorters matematisk uppskattning, så finns det flera studier som beskriver kunskap i matematisk uppskattning som viktigt för det fortsatta lärandet samtidigt som de också beskriver det som ett försummat område. Matematisk uppskattning är en av de åtta komponenterna i ramverket Foundational Number Sense, FoNS. Dessa åtta, delvis överlappande, komponenter är tillräckligt många för att täcka så gott som allt det som forskningslitteraturen kallar *grundläggande numeracitet*. Samtidigt är de tillräckligt få för att man ska kunna minnas dem utantill och omsätta dem i sin undervisning.

- ◇ Att beteckna kvantiteter med räkneord och numeriska symboler.
- ◇ Att talen kommer i ordningsföljd.
- ◇ Att tal kan beteckna antal (kardinalitet genom ett till ett-principen).
- ◇ Att jämföra kvantiteter i termer av lika många, fler och färre.
- ◇ Att representera antal på olika sätt (med och utan talsymboler).
- ◇ Att ungefärligt uppskatta; antal eller mått.
- ◇ Talkamrater, addition och subtraktion i talområdet 0–20.
- ◇ Enkla talmönster, exempelvis vartannat och vart tredje tal.

Vi har funnit att antalsuppskattning är sällsynt och faktiskt ofta helt frånvarande i läroböcker i såväl årskurs 1 som årskurs 3. Vi ser också att när läroplanen kommer in på matematisk uppskattning, så handlar det framförallt om avrundning i beräkningar. Naturligtvis är det mycket viktigt att som lärare undervisa om och som elev lära sig exakt kvantifiering. Men vår omfattande litteraturöversikt visade att för att utvecklas väl i sitt fortsatta matematiklärande, så är även kunskap om antalsuppskattning centralt. Det var en överraskning för oss att det verkar vara ganska sällsynt i årskurs 1 och 3, både i lektioner och i läroböcker, att uppskatta såväl antal som måttetal. Vi skulle gärna vilja se lite mer av matematisk uppskattning redan från årskurs 1. Vi antar också att lärarna från förskola till gymnasium sitter på klassrumserfarenhet av hur detta sker även om det endast är sparsamt dokumenterat i forskning hittills. Därmed passar vi bollen till dig som läsare.

LITTERATUR

Bakker, A. (2003). The early history of average values and implications for education. *Journal of Statistics Education*, 11(1).

Colliander, L. (2017). *Uppskattningsstrategier på lågstadiet? En fallstudie* (Examensarbete). Hämtad från su.diva-portal.org/smash/get/diva2:1109296/FULLTEXT01.pdf

En beskrivning av grundläggande numeracitet och även publikationer från forskningsprojektet FoNS finns på <https://www.mnd.su.se/forskning/matematikamnets-didaktik/forskningsprojekt/fons>.