

Ett ramverk för progression

Författarna presenterar ett ramverk som lärare och studerande kan använda då de vill se närmare på hur progressionen i begreppsutveckling ser ut i matematikläromedel. I följande artikel *Läroboksbråk* beskriver en lärarstuderande hur hon har använt ramverket i sitt examensarbete.

I Skolverkets kunskapskrav för betyg A i matematik i årskurs 9 kan vi läsa: "Eleven har *mycket goda* kunskaper om matematiska begrepp och visar det genom att använda dem i *nya* sammanhang på ett *väl* fungerande sätt. Eleven kan även beskriva olika begrepp med hjälp av matematiska uttrycksformer på ett *väl* fungerande sätt. I beskrivningarna kan eleven växla mellan olika uttrycksformer samt föra *välutvecklade* resonemang kring hur begreppen relaterar till varandra."

Progression! Ett ledord för varje lärargärnings ansträngning; men vad innebär det att eleven uppvisar progression i sin kunskapsutveckling och hur representeras progression i våra matematikläromedel? Vi kommer här först att kort recapitulera hur vi ser på progression, med fokus på begreppskunskap och därefter beskriva den teoretiska grunden för våra ställningstaganden. Om du är mer intresserad av essensen av progression i begreppskunskap kan du läsa mer i Nämnarenartikeln *Ett sätt att tänka på progression i begreppskunskap*. I följande text kommer vi huvudsakligen att fokusera på ett ramverk för att undersöka progression i begreppskunskap i matematikläromedel.

Som vi kan se i kursplaneutdraget ovan så är målet för vår undervisning att eleverna ska ha mycket goda kunskaper om matematiska begrepp och att de kan beskriva dem med matematiska uttrycksformer. Nu är det inte helt enkelt att ringa in vad som är *mycket goda kunskaper om matematiska begrepp* för en 15-åring. Mycket tydligare är skrivningen om att de begrepp som eleverna behärskar ska de kunna uttrycka med matematiska uttrycksformer. Eftersom vi är förtjusta i kvotkonstruktioner, som bråk, division och rationella uttryck, och inte nog kan poängtera dess betydelse för vår andra skolmatematiska fäbless, de proportionella resonemangen, tar vi även denna gång avstamp i kvotkonstruktionerna; närmare bestämt i hur progression i kvotbegreppet representeras i matematikläromedel.

Vad är progression i begreppskunskap?

Kunskap om matematiska begrepp utvecklas över tid. Men hur går det till när begreppen ges mening? I begynnelsen av utbildningen finns bara ett sätt att ge begrepp mening: situationer. Notationen $\frac{1}{3}$ är helt obegriplig för en 6-åring, men att tre barn som ska dela på en tårta får en tredjedel var är rimligt om man anför något slags rättviseargument. Nästa steg är att beskriva

situationen med ikoniska representationer. Ikoniska betyder ”som liknar det betecknade”. Vi kan alltså rita en tårta skuren i tre delar för att representera en tredjedel. Situationerna och de ikoniska representationerna är alla matematiska begrepps gryning. Men någonstans i elevernas progression av begreppskunskap ska situationerna och de ikoniska representationerna successivt fasas ut eftersom de icke-ikoniska representationerna, som utgörs av det matematiska symbolsystemet, är nyckeln till progression och till uppfyllelse av kunskapskravet för betyg A i årskurs 9. För progression i begreppskunskap måste det följaktligen finnas ett skifte från förklaringar av begrepp med hjälp av situationer och ikoniska representationer till förklaringar i det matematiska symbolsystemet. Det här sättet att se på saken kan också relateras till psykologen Jerome Bruners principer för progression där barnet går från att hantera kunskap i handling, via att hantera kunskap som förmedlas i ikoniska representationer till att hantera kunskap i symbolisk form. Eftersom matematikundervisningen i mycket hög utsträckning förlitar sig på läromedel är det rimligt att detta skifte stöds i den beskrivna progressionen av begreppskunskap i våra läromedel. Med denna utgångspunkt har vi utvecklat ett ramverk och vi har använt det för att undersöka den beskrivna progressionen av begreppskunskap från årskurs 1 till 9. Som tidigare nämnts var fokus för vår undersökning begreppsfältet kvotkonstruktioner.

Ramverk för att undersöka progression i begreppskunskap

Ramverket baseras på två metodologiska principer: (1) progression i begreppskunskap definieras som en utvidgning av individens begreppsfält och (2) representationer klassificeras som situationsbetingade, ikoniska eller symbolsystems-betingade. Dessa båda principer operationaliseras enligt följande i vår analys:

1. Vi identifierade först tillfällen där läroboken, som en representant för författarna, gör matematiska påståenden, framför argumentet eller ger mening åt begrepp relaterade till det valda begreppsfältet. För varje sådant fall utvärderade vi i vilken form kommunikationen presenteras; det vill säga om den presenteras som en situation, som en ikonisk representation eller av icke-ikoniska symboler i ett symbolsystem.
2. Därefter kategoriserade vi vilken funktion påståendet, argumentet eller beskrivningen hade. Efter en preliminär empirisk undersökning fann vi tre typer av funktioner: *begrepp* där något begrepp ges mening, *procedur* där någon procedur beskrivs och *samband* där ett samband mellan begrepp utforskas, förklaras eller beskrivs.

Sammanfattningsvis ger analysen en tvådimensionell beskrivning av vilken typ av representation det är och den funktion som representationen har. För att förtydliga processen visar vi några exempel. I själva verket görs kategoriseringen av hur representationerna förekommer på ett lite mer intrikat sätt och det förklarar vi med hjälp av följande exempel hämtade från *Favorit Matematik* årskurs 1–6 och *Matte direkt* årskurs 7–9.

39. Division – innehållsdivision

Film Lyssna på berättelsen.

Charlie lägger
12 bullar i påsar.
Han lägger 4
bullar i varje påse.

Hur många påsar
behöver Charlie?

Svar: 3 påsar



1. Du lägger 18 bullar i påsar. Hur många påsar behöver du?

a. Det ska vara 3 bullar i varje påse.



Svar: påsar

b. Det ska vara 6 bullar i varje påse.



Svar:

41. Sambandet mellan division och multiplikation

Film Lyssna på berättelsen.

Det finns 12 böcker. Hur
många högar får du, om du
lägger 4 böcker i varje hög?

$$\frac{12}{4} = 3$$

Du kan kontrollera division
med multiplikation.
 $3 \cdot 4 = 12$



1. Dividera. Kontrollera division med multiplikation.



a. $\frac{8}{2} = 4$

$4 \cdot 2 = 8$



b. $\frac{6}{3} =$

$\cdot = 6$



c. $\frac{12}{6} =$

$\cdot =$

40. Att skriva division

Lyssna på berättelsen.
Film

Det finns sex glasskular.
I varje bägere ska det vara
2 kuler glass. Hur många
bägere behövs det?

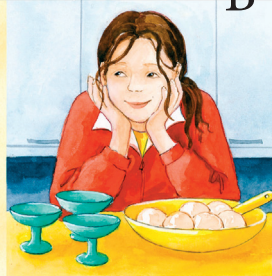
Divisionen kan skrivas

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \begin{array}{l} \text{täljare} \\ \text{nämnare} \end{array} = \text{kvot}$$

eller

$$6 : 2 = 3 \quad \begin{array}{l} \text{täljare/nämnare} \\ \text{= kvot} \end{array}$$

Du säger: Sex delat med två är
lika med tre, eller sex dividerat
med två är lika med tre.



Mer om att dividera med bråk

Inverterat tal

$$\frac{2}{3} \text{ kallas för det inverterade talet till } \frac{3}{2}$$

Om man multiplicerar ett tal med dess inverterade tal
får man alltid produkten 1.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1 \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$$

Division av bråk

Att utföra divisionen $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ är detsamma som att
bestämma hur många fjärdedelar det finns i en halv.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$



Förläng med $\frac{4}{4}$ så att nämnaren blir 1.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Att dividera med ett bråk ger samma
resultat som att multiplicera med
bråkets inverterade tal.

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Illustrationer till fyra exempel.

Exempel A (årskurs 3)

Exempel A introducerar begreppet division som innehållsdivision genom att hänvisa till en situation:

Charlie lägger 12 bullar i påsar. Han lägger 4 bullar i varje påse.
Hur många påsar behöver Charlie?

Det är underförstått att innehållsdivision är den matematiska operation som motsvarar denna handling. Meningsskapandet görs därför genom en hänvisning till en klass av situationer. Vi betecknar detta med symbolen 🧐. I exempel A illustreras situationen också med en bild av 12 bullar, i grupper om fyra i tre påsar. Längst ner i utdraget illustreras samma princip med en matrismodell. Båda dessa illustrationer är ikoniska representationer, som vi kommer att beteckna med symbolen ❤️. Det viktigaste meningsskapande argumentet kommer dock från situationerna. Bilderna av bullarna är ikoniska representationer av situationen. Vi kommer att beteckna detta med 🧐 → ❤️, där pilen indikerar att representationsformen som kommer efter pilen används som beteckning för resonemanget som kommer före pilen.

Exempel B (årskurs 3)

Även i exempel B ges huvudargumentet för betydelsen av begreppet division av en situation.

Det finns sex glasskolor. I varje bägare ska det vara 2 kolor glass.
Hur många bägare behövs det?

Detta är samma typ av innehållsdivision som i exempel A, och det hänvisas till samma klass av situationer, men den är kontextualiserad lite annorlunda. Exempel B innehåller också symboler från standardsymbolsystemet som används för att skriva bråk och division. Vi betecknar förekomsten av icke-ikoniska symboler från matematiska symbolsystem med π . Inga resonemang genomförs dock i detta symbolsystem, det används bara för att beteckna fenomenen från situationen. Vi betecknar detta med  $\rightarrow \pi$. Återigen skriver vi representationstypen där det meningsbärande argumentet finns först, sedan en pil och därefter andra representationer som används som beteckningar.

Exempel C (årskurs 3)

I exempel C gäller sambandet mellan multiplikation och division. Precis som i exempel B visas en innehållsdelningssituation med symbolsystemet. Det står att "Du kan kontrollera division med multiplikation, $3 \cdot 4 = 12$ ". Men det finns inget argument för detta samband mellan division och multiplikation. För att hitta ett argument måste vi istället titta på bilden av de 12 böckerna, i 3 grupper om 4. Som vi har sett i de andra exemplen, visar denna ikoniska representation division som innehållsdivision och betecknar det med symbolsystemuttrycket $12/4$. Men, i tidigare kapitel har multiplikation beskrivits som upprepad addition och liknande ikoniska representationer har använts för att representera (och har representerats av) $3 \cdot 4 = 12$. Därför ligger argumentet (om än mycket implicit) för sambandet mellan multiplikation och division i den ikoniska representationen. Detta upprepas också i uppgift 1 där den ikoniska representationen visar både en division och en multiplikation. Vi klassificerar detta som en begreppsförklaring av typen  $\rightarrow \pi$ och en tilläggsförklaring av typen  $\rightarrow \pi$.

Exempel D (årskurs 8)

I exempel D innehåller utdraget både procedurell och begreppslig information. Procedurinformationen uttrycks genom symbolsystemet (π). Den begreppsliga informationen om inversen förklaras genom relationer uttryckta i symbolsystemet (π); hur multiplikationer av bråk fungerar symboliskt och att ett bråk med identisk täljare och nämnare är 1. Det finns också en beskrivning av division som hänvisar till lika gruppering men den formuleras direkt i termer av bråk: "[...] hur många fjärdedelar det finns i en halv". Även om detta uttrycks verbalt klassificerar vi det som ett uttryck för relationer i symbolsystemet. Uttalandet illustreras sedan med en ikonisk framställning ($\pi \rightarrow$ ). Denna bild används för att ge mening till sambandet mellan division och bråk ( $\rightarrow \pi$) men förklarar bara varför svaret blir 2. Resten av betydelsen av beräkningarna och formlerna ges endast genom att relationer används i symbolsystemet (π). Ett vanligt fenomen som inte finns i något av dessa exempel är när en egenskap eller procedur presenteras i symbolisk form, men ingen anledning anges för varför egenskaperna gäller eller proceduren fungerar. Detta betecknar vi med $\rightarrow \pi$, det vill säga något är betecknat med symbolsystemet, men det saknas meningsbärande argumentation.

Den analytiska ramen

Sammanfattningsvis har den analytiska ram som vi föreslår följande steg:

1. Hitta i den valda bokserien alla exempel som behandlar det begreppsält som du vill analysera.
2. Klassificera för varje exempel resonemangets eller förklaringens funktion. I vårt fall avslöjade en inledande empirisk analys av materialet tre typer av funktioner. Att ge mening åt begrepp, att ge mening åt procedurer eller samband, eller att illustrera procedurer och samband. Annat material kan innehålla andra funktioner. Samma exempel kan också ha flera funktioner.
3. Klassificera representationerna för varje exempel. Vi använder tre teoretiskt grundade representationer: situationer, ikoniska representationer och icke-ikoniska symbolsystem. Vi analyserar också om något förklaras eller ges mening, eller bara betecknas eller illustreras.

Progressionen i läromedel

I läroboksserien vi undersökte fann vi inga förändringar i meningsskapande från situationer och ikoniska representationer till meningsskapande genom matematiska relationer uttryckta i symbolsystemen. I själva verket fann vi bara fem fall där författarna förlitar sig på icke-ikoniska matematiska symbolsystem för att förklara eller ge mening åt begrepp, procedurer och samband mellan begrepp.

		begrepp	procedur	samband
åk 3	division, lika delar division, lika grupper division, lika grupper multiplikation and division division, lika grupper proportionalitet bråk, del av helhet bråk, del av helhet bråk, del av helhet bråk, en hel	☺ ☺ → ♥ ☺ → π ☺ → π ☺ → π ☺ → π ♥ ♥ → π ♥ → π ♥ → π		♥ → π
åk 4	division, lika grupper och uppdelning division, kort division division, kort division bråk, lika bråk	☺+♥ → π ♥ → π	♥ → π → π	
åk 5	bråk, blandad form bråk, förkorta bråk bråk, förkorta till enklaste bråkform dividera ett bråk med ett heltal multiplicera ett bråk med ett heltal bråk, delar av tal	♥ → π ♥ → π ♥ → π	→ π → π → π → π → π → π	☺+♥ → π ☺+♥ → π

åk 6	bråk, del av helhet, blandad form bråk, omvandla mellan blandad form och bråkform bråk, förkorta till enklaste bråkform bråk, förlänga	$\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$
åk 7	bråk, del av helhet bråk, del av helhet större än 1 bråk, storleksordna bråk, likhet mellan bråk bråk, förkorta bråk, förlänga bråk, andel av antal bråk, del av helhet bråk, bråk större än 1 bråk, likhet	$\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\smiley + \heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\smiley + \heartsuit \longrightarrow \pi$ $\pi, \heartsuit \longrightarrow \pi$
åk 8	bråk, del av antal bråk, lika bråk multiplicera ett bråk med ett heltal multiplicera bråk multiplicera bråk bråk, del av helhet bråk, förkorta och förlänga bråk, förenkla uttryck* bråk, division av bråk* bråk, division av bråk, invers* bråk, division av bråk med variabler*	$\smiley + \heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ π $\smiley + \heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ π $\longrightarrow v$ $\smiley + \heartsuit \longrightarrow \pi$ $\pi, \pi \longrightarrow \heartsuit$ π $\pi, \pi \longrightarrow \heartsuit$ π π
åk 9	bråk, jämföra bråk bråk, jämföra bråk, förkorta, förlänga bråk, multiplicera bråk	$\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\longrightarrow \pi$ $\heartsuit \longrightarrow \pi$

Raderna märkta med * kommer från det som i boken benämns som röd kurs, sidor med svårare uppgifter som vanligen inte alla elever gör.

På ytan ser det ut som om läroböckerna innehåller en hel del symbolisk information. Men, vår analys visar att symbolerna används som etiketter eller representationer, och att argument mycket sällan utförs med hjälp av matematisk information som redan har kodats i symbolisk form. De undersökta läroböckerna ger eleverna samma begränsade förklaringar i ikoniska representationer av kvotkonstruktioner från årskurs 3, när det introduceras, till årskurs 9. I de läromedel vi undersökte fanns alltså inget successivt skifte från förklaringar av begrepp med situationer och ikoniska representationer till förklaringar i det matematiska symbolsystemet.

Åskådningskonceptet har sträckts för långt

Varifrån kommer då motviljan mot symbolsystem? Berättelsen går tillbaka till slutet av 1800-talet när Pestalozzis koncept "anschauung", på svenska vanligen uttryckt som åskådning, spred sig över hela Europa. Pestalozzis metod för utbildning av små barn betonade att barn lär sig genom handling och konkreta föremål. Pestalozzis princip var att inget ord skulle användas förrän det förstods grundligt genom konkret observation av ett materiellt objekt eller en handling, som ett sätt att skilja en sak från en annan. Vi håller med Pestalozzi om att matematiska begrepp måste växa ur situationer och ikoniska framställningar; men vi hävdar att åskådningskonceptet har sträckts alldeles för långt i de läroböcker som vi undersökte. Elever i årskurs 6 till 9 är inte små barn! Genom att insistera på att ge mening till det komplexa begreppet kvot genom ikoniska framställningar hävdar vi att eleverna inte ges möjligheten att lära sig att använda styrkan i att resonera i matematiska symbolsystem. Vår slutsats är att elevernas kunskapsutveckling begränsas av att begreppsförklaringarna aldrig skiftar från ikoniska framställningar till matematiska uttrycksformer i symbolsystem.

LITTERATUR

- Ahl, L. M., & Helenius, O. (2018). Why is calculating the average speed difficult? I E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (red), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s 3–10). PME.
- Ahl, L. M., & Helenius, O. (2018). *Ett sätt att tänka på progression i begreppskunskap*. Nämnaren 2018:3.
- Hedlund, J. (2021). *Läroboksbråk*. Nämnaren 2021:2.

Favorit Matematik ges ut av Studentlitteratur.
Matte direkt ges ut av Sanoma utbildning.