Bokstäver som obekanta tal

Cecilia Kilhamn, Göteborgs Universitet och Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet

För att utveckla elevens förmåga att kunna tolka bokstäver i algebran som obekanta tal och att kunna resonera med hjälp av bokstäver och algebraiska uttryck, kan ni se till att delar av matematikinnehållet blir synliga under lektionen. Här beskrivs några delar av matematikinnehållet som skulle kunna uppmärksammas i undervisningen.

- Att en bokstav i algebran står för ett värde/en kvantitet/ett tal. Bokstaven är inte en förkortning för ett ord.
- Att valet av bokstav som beteckning för ett obekant tal är godtyckligt. Det spelar ingen roll vilken bokstav man använder och bokstaven har inte ett värde förknippat med dess ordning i alfabetet.
- Att ett uttryck som representerar ett tal är en sammansättning av symboler som kan innehålla både bokstäver, tal och operationer. Genom att symbolisera två tal med x och $(x + 1)$ kan man prata om dem och även räkna med dem utan att känna till dem.

En problemlösningsaktivitet

För att bokstäverna ska få någon matematisk mening behöver de användas i matematiska uttryck. Att skapa uttryck kan göras på olika sätt. Här beskrivs hur man skulle kunna arbeta med en problemlösningsuppgift som vi kallar **Spelresultatet**. Inledningsvis bör man ge eleverna fria händer för att lösa problemet på det sätt de själva vill. De kan använda konkret material, rita bilder, göra antaganden och sedan testa och pröva, eller också kan de använda algebra. Att använda bokstäver och skriva uttryck är ett effektivt sätt att lösa problemet och syftet med andra delen av aktiviteten är därför att eleverna ska upptäcka att den möjligheten finns.

Spelresultatet

Fyra barn spelar ett kortspel som går ut på att vinna så många kort som möjligt ur kortleken som har 52 kort. När spelet är slut jämför de hur många kort de har:

Carl har 7 kort fler än Ari
David har 3 kort fler än Carl
Ari har 3 kort färre än Anna

Hur många kort har var och en? Vem vann?

Aktiviteten kan genomföras i era klasser genom att systematiskt synliggöra för eleverna olika delar av innehållet.

1. Tolka påstående

Låt eleverna arbeta i par eller grupper. Om eleverna ges tillgång till en kortlek (52 kort) eller annat plockmaterial så kan den som vill arbeta praktiskt/laborativt. Se också till att eleverna har papper och penna och uppmuntra dem att rita och skriva. En aspekt av det här problemet är att varje påstående kan tolkas på två sätt. *Carl har 7 kort fler än Ari* betyder samtidigt att *Ari har 7 kort färre än Carl.* Dessa två uttrycks sägs vara ekvivalenta, vilket betyder att de är sanna samtidigt. Behövs det kan man skriva en tabell på tavlan där relationen är konstant och riktningen varieras:

Carl har 7 kort fler än Ari	⇔	Ari har 7 kort färre än Carl
David har 3 kort fler än Carl	⇔	Carl har 3 kort färre än David
Ari har 3 kort färre än Anna	⇔	Anna har 3 kort fler än Ari

När den första gruppen är klar bör de få frågan:
Är ni säkra? Kan ni bevisa att ert resultat stämmer?

Så småningom kommer de flesta grupper fram till en lösning. Alla bör ha kommit fram till följande resultat: Carl har 15; Ari har 8; David har 18; Anna har 11.

2. Olika lösningsmetoder

Lyft nu fram de *olika* sätten att lösa problemet du finner bland eleverna. Ställ hela tiden frågorna: Hur gjorde ni? Hur kan ni vara säkra på ert resultat? Var började ni? Vem utgick ni från? Resultatet kommer att vara konstant men lösningsmetoderna varierar.
Har någon av grupperna löst problemet algebraiskt? Hur tänkte de då?

3. Introducera algebra

I nästa skede introducerar man algebra. Använd samma problem, men den nya uppgiften är att beskriva barnens spelresultat algebraiskt. Detta kommer att kräva en hel del funderande och samtal för att rätt tolka uttrycken *fler än* och *färre än* så att de kan översättas till algebraiska uttryck. Eftersom eleverna redan har resultatet kan de hela tiden kontrollera sina algebraiska uttryck och se om de stämmer.

4. Ändra utgångslägen

Behåll problemet konstant men variera vilken person i problemet man ska utgå från. Om vi säger att Carl har x antal kort, hur skulle vi kunna uttrycka hur många kort alla de andra har? Till exempel Ari: Om Carl har 7 fler än Ari så måste Ari ha 7 färre än Carl, vilket skrivs som $x - 7$. Låt eleverna arbeta med en tabell och låt olika elevgrupper arbeta med olika utgångslägen. Man kan i det här problemet utgå från Carl, David, Ari eller Anna. Att utgå från Ari är lättast, vilket syns i tabellerna. Fundera på varför!

x = så många kort Carl har		
barn	antal kort	kontroll
Carl	x	15
Ari	$x - 7$	15-7=8
David	$x + 3$	15+3=18
Anna	$x - 7 + 3$	15-7+3=11

y = så många kort Ari har		
barn	antal kort	kontroll
Carl	$y + 7$	8+7=15
Ari	y	8
David	$y + 7 + 3$	8+7+3=18
Anna	$y + 3$	8+3=11

d = så många kort David har		
barn	antal kort	kontroll
Carl	$d - 3$	18-3=15
Ari	$d - 3 - 7$	18-3-7=8
David	d	18
Anna	$d - 3 - 7 + 3$	18-3-7+3=11

a = så många kort Anna har		
barn	antal kort	kontroll
Carl	$a - 3 + 7$	11-3+7=15
Ari	$a - 3$	11-3=8
David	$a - 3 + 7 + 3$	11-3+7+3=18
Anna	a	11

I det avslutande samtalet diskuteras vilken tabell som var enklast och hur man kan veta vilket barn som är lämpligt att utgå från. Om man sedan går tillbaka till ursprungsproblemet **Spelresultatet** kan man undersöka hur problemet snabbt och enkelt löses genom att ta hjälp av att skriva algebraiska uttryck. Skriver man enligt den första tabellen så adderar man alla uttrycken och får en ekvation: $x + x - 7 + x + 3 + x - 7 + 3 = 52$. Sedan löser man den ekvationen och vi ser här behovet av att även kunna arbeta med ekvationslösning.

$x + x - 7 + x + 3 + x - 7 + 3 = 52$

$4x - 14 + 6 = 52$

$4x - 8 = 52$

$4x = 60$

$x = 15$

Vad kan eleverna få syn på i problemlösningsaktiviteten?

I problemlösningsaktiviteten **Spelresultatet** finns det möjlighet för eleverna att uppmärksamma att en bokstav står för ett värde genom att bokstäverna hela tiden ersätter värden. Vill du göra det extra tydligt kan du betona att det är *antal kort* som gömmer sig bakom bokstäverna. Prata inte om det som att ”Carl är Ari plus 7” utan säg istället ”Carls antal kort är lika många som Aris antal kort plus 7”. ”Ari plus 7” är endast meningsfullt om Ari representerar ett tal som kan adderas med 7, men eftersom Ari är en person blir det inte meningsfullt. I problemlösningsaktivitetens, steg 3, där algebraiska uttryck skapas blir aspekten också synlig i kontrollen när bokstäverna ersätts med de tal de representerar.

Att valet av bokstav inte spelar någon roll kan lyftas fram genom en diskussion av vilken bokstav som skulle kunna väljas för att beteckna ett visst barns antal kort. Om eleverna föreslår första bokstaven i namnet kan det tolkas som en förkortning, men eftersom vi har två namn på A så fungerar inte det utan ytterligare diskussion. Bokstaven står inte för barnet utan för *antal kort* barnet har. Därför kan det vara lämpligt att direkt introducera en helt avvikande bokstav, till exempel x. Om man börjar med x och sen vill välja en annan bokstav för att representera antal kort nästa barn har kan man lyfta diskussionen om att det faktiskt inte spelar någon roll vilken bokstav man väljer. Detta kan göras synligt i det samtal som förs i klassrummet och genom att eleverna själva får föreslå olika bokstäver som kan användas.

Problemet löses med hjälp av olika strategier. I den första delen genom att olika verbala uttryck används för att representera antalet kort barnen har (Carl har 7 fler än Ari, Ari har 7 färre än Carl). I den andra delen av aktiviteten, som handlar om att beskriva tal med bokstäver och algebraiska uttryck, finns denna variation av olika verbala uttryck som en bas för att skapa de algebraiska uttrycken. Speciellt blir detta synligt i de mer komplicerade fallen. Till exempel utgår man i tabell 2 från att Ari har y kort. Davids antal kort beskrivs i termer av hur många kort Carl har. För att få fram ett uttryck för Davids antal kort måste man först betrakta Carls antal som $y + 7$ och sedan hantera det som ett tal till vilket man adderar ytterligare 3.

I uppföljningssamtalet kan du jämföra hur ett visst barns antal kort omnämns i de olika tabellerna. Till exempel är Annas antal kort $x - 7 + 3$ i den första tabellen och $y + 3$ i den andra tabellen. Vi ser att samma tal kan uttryckas på olika sätt eftersom talet som gömmer sig bakom variabeln är olika. $x - 7 + 4$ och $y + 3$ kan vara två olika uttryck för samma tal, eftersom x och y står för två olika tal.