Russell Hatami & Ali Ludvigsen

Som Pascals triangel – men på direkten

Två lärare och lärarutbildare med erfarenheter från Sverige, Norge och Iran presenterar här en iransk algoritm för att beräkna binomialkoefficienter. De visar att algoritmen kan vara ett alternativ till användningen av Pascals triangel.

Pascals triangel är nu för tiden känd världen över som en enkel algoritm för koefficienter till termerna i en binomialutveckling. Men Pascals triangel har varit i bruk under många århundraden före hans födelse. Till exempel runt 1000-talet i gamla Persien av matematiker som Al-Karaji, något senare av den kända iranske ikonen, poeten, astronomen och matematikern Umar Khayyam och på 1200-talet i Kina av Yang Hui. I *Matematiktermer för skolan* kan vi läsa:

> *Triangeln var bekant inom indisk, arabisk, persisk och kinesisk matematik under det tionde eller elfte århundradet, och i Italien under det sextonde. Al-Karaji (953–1029) kände till den, liksom troligen även Umar Khayyam (1048–1131). Den kallas Khayyams triangel i Iran, Yang Huis triangel i Kina (efter Yang Hui, 1238–1298), och Tartaglias triangel i Italien (efter Niccolò Fontana Tartaglia, 1500–1577). Blaise Pascal (1623–1662) behandlade triangeln i en uppsats 1654.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Kanske var det tack vare Umar Kayyam som gymnasieelever i Iran fick lära sig en annan algoritm som är betydligt enklare och smidigare. Med hjälp av den går det direkt att bestämma koefficienterna i en binomialutveckling, utan några komplicerade beräkningar.

Introduktion för att finna mönster

Vi undervisar gymnasieelever och lärarstudenter på högskolan i Norge. I följande text kallas alla studerande, med enstaka undantag, för studenter. Utöver den vanliga Pascals triangel har vi sedan mitten av 90-talet presenterat en alternativ algoritm till Pascals triangel där vi börjar med följande utvecklingar:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

Vi fortsätter med följande tre, vilka inte varit vanligt förekommande för studenterna, speciellt inte för elever i gymnasieskolan.

$$(x+y)^3 = ?$$
$$(x+y)^4 = ?$$
$$(x+y)^5 = ?$$

Studenterna får sedan själva utföra lite ”tråkiga” men mat(te)nyttiga multiplikationer och additioner.

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = \ldots = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)^3 = (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = \ldots = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Via dialog och reflektioner över mönstret börjar studenterna upptäcka att exponenten för varje term är 3 respektive 4 i båda utvecklingarna. De upptäcker även att exponenten till x minskas med en enhet samtidigt som y:s exponent ökas med en enhet. Alltså kan de skriva utvecklingen $(x+y)^5$ utan kunskap om varje terms koefficient på följande sätt:

$$x^5,\ x^4y,\ x^3y^2,\ x^2y^3,\ xy^4,\ y^5$$

Våra studenter ser att detta mönster finns i alla exponenter i utvecklingar av $(x+y)^n$ för alla $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Den stora frågan om binomialutvecklingen som återstår är alltså koefficienternas tillblivelse. *Hur kan vi hitta dessa koefficienter*, undrar alla.

I början av undervisningen, efter våra samtal, brukar vi komma fram till att vid utveckling av $(x-y)^n$ är varannan term negativ. Det är något som upptäcks enklast genom att undersöka när $n = 2$, 3 och 4. Eftersom vi kan skriva $(x-y) = [x+(-y)]$, så gäller det vid udda exponenter till $(-y)$ att en negativ koefficient erhålls. Därför kan vi exempelvis skriva på följande sätt:

$$(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$$

Vår lösning är en enkel algoritm som vi själva lärde oss i skolan på 60- respektive 80-talet i Iran. Denna algoritm har vi tyvärr inte sett i annan litteratur eller hos andra matematiker som vi kommit i kontakt med under våra år i Sverige och Norge. Vi vill gärna dela med oss till en större publik än våra egna studenter och nära kollegor och förklarar nu algoritmen.

Vi brukar själva skriva, på tavlan, hela utvecklingen ”på direkten” med hjälp av huvudräkning:

$$(x \pm y)^5 = x^5 \pm 5x^4y + 10x^3y^2 \pm 10x^2y^3 + 5xy^4 \pm y^4$$
$$(x \pm y)^6 = x^6 \pm 6x^5y + 15x^4y^2 \pm 20x^3y^3 + 15x^2y^4 \pm 6xy^5 + y^6$$

Syftet har främst varit att imponera på studenterna genom att visa metodens enkelhet – inte lärarens kunnande. Alltså kan eleverna enkelt bli lika duktiga som sina lärare. Detta brukar vi introducera med den retoriska frågan *Vill ni veta hemligheten?* Svaret har alltid varit, med stark majoritet och vilja: *Ja, det vill vi!* Vi beskriver först själva algoritmen och därefter beviset.

En algoritm i två steg

Algoritmen har två viktiga steg som vi illustrerar med ett exempel när exponenten är 7:

1. Varje term skrivs som en produkt av x och y med uttrycksexponenten 7 i en successiv trappa från 7 till 0 för x och vice versa för y.

$$x^7y^0,\ x^6y^1,\ x^5y^2,\ x^4y^3,\ x^3y^4,\ x^2y^5,\ x^1y^6,\ x^0y^7$$
$$=\ x^7,\ x^6y^1,\ x^5y^2,\ x^4y^3,\ x^3y^4,\ x^2y^5,\ x^1y^6,\ y^7$$

Om vi skriver med koefficienter blir termerna:

$$a_0x^7,\ a_1x^6y^1,\ a_2x^5y^2,\ a_3x^4y^3,\ a_4x^3y^4,\ a_5x^2y^5,\ a_6x^1y^6,\ a_7y^7$$

Kommentar. Egentligen behövs inte första raden där vi har skrivit x^7 och y^0, men nollan i y^0 hänger ihop med symbolen för första termens koefficient a_0 som i sin tur hör samman med kombinatorik.

$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$$

2. Koefficienten till respektive term beräknas i det andra steget och det beskrivs i den iranska läroboken så här:

ضریب هر جمله برابر است با حاصلضرب ضریب جمله ی قبلی در توان حرف x

در ان جمله , تقسیم بر تعداد جمله هایی که تا ان جمله نوشته شده است.

Koefficienten för varje ny term är produkten av koefficienten till föregående term med dess x:s exponent, dividerat med antalet termer skrivna fram till denna term.

Kommentar. Här beskriver vi utvecklingen av $(x \pm y)^7$-termen så som studenterna kan göra på direkten. Meningen är att dessa uträkningar görs med hjälp av huvudräkning, där förkortning av koefficientuttrycket inför nästa operation spelar stor roll.

$$x^7$$
$$\pm 7x^6y$$
$$+\frac{6 \cdot 7}{2}x^5y^2 = 3 \cdot 7x^5y^2 = +21x^5y^2$$
$$\pm\frac{5 \cdot 21}{3}x^4y^3 = \pm 5 \cdot 7x^4y^3 = \pm 35x^4y^3$$

Resten skriver vi med hjälp av symmetri och vi får:

$$(x \pm y)^7 = x^7 \pm 7x^6y + 21x^5y^2 \pm 35x^4y^3 + 35x^3y^4 \pm 21x^2y^5 + 7x^1y^6 \pm y^7$$

Bevis för algoritmen

Vi börjar med att sammanfatta algoritmens process stegvis tillsammans med respektive tillhörande kombinatoriska formel i en och samma tabell, för att göra beviset enkelt tillgängligt. Vi använder färgerna **röd till *x*:s exponent**, **blå till föregående terms koefficient** och **grön till antalet termer** fram till den berörda.

$(x+y)^7$	term 1	term 2	term 3	term 4	term 5	term 6	term 7	term 8
Steg 1	$1x^7$	x^6y	x^5y^2	x^4y^3	x^3y^4	x^2y^5	x^1y^6	y^7
Steg 2 huvudräkning	1	$\frac{7\cdot 1}{1}$	$\frac{6\cdot 7}{2}$	$\frac{5\cdot 21}{3}$	$\frac{4\cdot 35}{4}$			
	$a_0=1$	$a_1=7$	$a_2=21$	$a_3=35$	$a_4=35$	$a_5=21$	$a_6=7$	$a_7=1$
Kombinatorisk formel	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$

Alltså får vi: $(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7x^1y^6+y^7$

Varför är algoritmen korrekt?

Med hjälp av kombinatorik ges ett bevis för denna algoritm. Därifrån kan vi fortsätta vägen mot generaliseringen.

Om vi väljer koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, a_6, a_7$ för att beteckna koefficienterna i utvecklingen av $(x+y)^7$, så kan dessa beräknas enlig följande rekursiva talserie:

$$a_0 = 1 \text{ som är lika med } \binom{7}{0} = \frac{7!}{0!(7-0)!} = \frac{7!}{7!} = 1$$

$$a_1 = \frac{a_0\cdot 7}{1} = \frac{1\cdot 7}{1} = 7 \text{ som är lika med } \binom{7}{1} = \frac{7!}{1!6!} = 7$$

$$a_2 = \frac{a_1\cdot(7-1)}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21 \text{ som är lika med } \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

$$a_3 = \frac{a_2\cdot(7-2)}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35 \text{ som är lika med } \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Med hjälp av $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ får vi att $a_4=a_3$, $a_5=a_2$, $a_6=a_1$ och $a_7=a_0$

En algoritm med didaktisk relevans

För somliga studenter reduceras deras tidigare frustration kring kvadrerings- och kubregeln. Gymnasieelever får bättre självförtroende samtidigt som de får betydligt djupare kunskap om innehåll som vanligtvis undervisas först på universitet. Algoritmen är inte bara intressant och exotisk, den är även kort och koncis som en algoritm bör vara. Den har också didaktisk bäring, inte enbart i relation till binomialutveckling utan också i matematikinlärning och teoribildning där definition och bevis spelar betydande roller. Studenter får i ett tidigt stadium reflektera över sina matematikkunskaper där både kommunikation och resonemang visar vägen mot abstraktion, generalisering och modellskapande. Ordspråket ”Kunskap är makt” upplevs.

Vad vi vill kalla denna algoritm

Vi vet att Khayyam är en känd internationell vetenskapsperson. År 1998 firades 950-årsjubileet av hans födelse. I boken *Introduction to the history of science* kallar George Sarton andra halvan av 1000-talet för ”Khayyams epok”. Vi önskar därför hedra denna fantastiska algoritm med Khayyams namn: nämligen Khayyams algoritm eller *Khayyams På direkten*.

Mer om Pascals triangel – för både barn och vuxna!

Pascals triangel är otroligt spännande trots sin enkla uppbyggnad. Minsta barn kan skapa den, och bygga den högre och högre genom att addera nya lager i botten. Att bygga en stor Pascals triangel är en rolig utmaning för den som just lärt sig addera flersiffriga tal – med massor av additionsträning på köpet.

I boken ***Sifferdjävulen***, skriven av Hans Magnus Enzenberger, berättas om pojken Robert som i sina drömmar får möta sifferdjälvulen och ledsagas av honom i talens värld. I första kapitlet får Robert höra:

> *Det djävulska med siffror och tal är att det är så enkelt. I själva verket behöver du inte ens någon miniräknare. Du behöver egentligen bara en sak: ettor. Med dem kan du göra nästan vad som helst.*

Halvvägs in i boken använder de ettorna till att bygga Pascals triangel och tillsammans undersöker de sedan många spännande mönster som gömmer sig i triangeln.