Anders Månsson

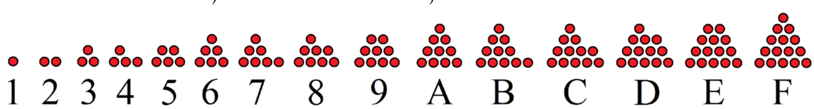
# Räkna i en annan bas än tio

## – *utan att fuska*

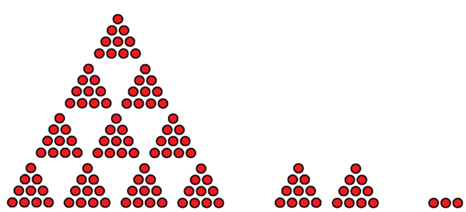
Minns du hur det var att inte kunna räkna och inte förstå talsystemet? Här beskriver författaren hur ett bassystem är uppbyggt och hur du kan räkna i en annan bas utan att översätta till bas tio som du redan kan. Med hjälp av tallinjer och tiokamrater är det inte så svårt.

Att lära sig räkna i en annan bas än tio är på många vis som att lära sig att räkna på nytt. Det är ett bra sätt för lärare och lärarstudenter att få en bättre förståelse för vad elever genomgår när de lär sig att räkna under de första skolåren. Ett problem som kan uppstå när vi räknar i annan bas än tio är att det lätt blir att vi ”fuskar” genom att vi gör om uträkningar till basen tio. Vi gör det för att vi inte är säkra på hur vi annars kan räkna ut vissa saker i annan bas än tio eller för att vi tycker det tar för lång tid att räkna ut allt i den andra basen. Men därmed försvinner samtidigt poängen med att räkna i annan bas. Elever som lär sig att räkna har inte möjlighet att fuska på detta vis, då de inte känner till någon annan bas som de kan byta till där de redan vet hur de räknar. Eleverna kan ju inte byta till bas tio, för det är bas tio de ska lära sig att räkna i. När vi inte tillåts att fuska på detta vis, blir vi tvungna att lära oss att räkna på nytt. Därför ska jag i denna artikel visa hur vi kan göra alla uträkningar i en annan bas utan att någon gång göra om till basen tio.

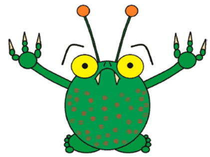
Hur ser siffran tio ut? Om du tänkt svara 10, tänk om, för 10 är inte en siffra utan en sifferkombination. Siffror är 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Saken är den att de flesta aldrig har sett siffran tio, då vi normalt sett inte använder den. Men räknar vi i en bas större än tio behöver vi en siffra för tio. Vi kan använda vilken symbol vi vill för tio, men ofta använder vi bokstaven A som siffra för talet tio, bokstaven B för elva, bokstaven C för tolv, osv.

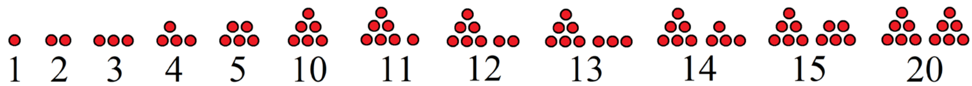



När basen tio är underförstådd, innebär till exempel 123 att vi har 1 grupp med $A \cdot A$ (dvs $A^2$), 2 grupper med A och 3 grupper med 1.



Talet 10 betyder alltså att vi har 1 grupp med A och 0 grupper med 1. Så istället för A kan vi lika gärna skriva 10, dvs $10 = A$. Anledningen till att vi människor använder basen tio och inte någon annan bas, hänger troligtvis ihop med det faktum att vi har tio fingrar (och tio tår). Hade människor, eller intelligent utomjordiskt liv som räknar som vi, istället haft 6 fingrar, hade 10 stått för talet 6, dvs $10 = 6$.






Då hade 123 istället stått för 1 grupp med $6^2 = 36$, 2 grupper med 6 och 3 grupper med 1, som hade varit talet 51 i basen tio.

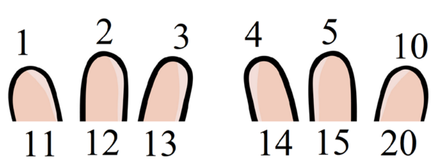
Såvida basen vi räknar i inte är underförstådd behöver sifferkombinationer därför markeras med basen vi använder. Är till exempel basen fem underförstådd är $10 = 10_{\text{fem}}$. I basen fem kan exempelvis talet 1234 uttryckas på följande vis:

$$\begin{aligned} 1234_{\text{fem}} &= 1 \cdot 10^3_{\text{fem}} + 2 \cdot 10^2_{\text{fem}} + 3 \cdot 10^1_{\text{fem}} + 4 \cdot 10^0_{\text{fem}} \\ &= 1 \cdot 10^3_{\text{fem}} + 2 \cdot 10^2_{\text{fem}} + 3 \cdot 10^1_{\text{fem}} + 4 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 1000_{\text{fem}} + 2 \cdot 100_{\text{fem}} + 3 \cdot 10_{\text{fem}} + 4 \cdot 1 \\ &= 1000_{\text{fem}} + 200_{\text{fem}} + 30_{\text{fem}} + 4 \end{aligned}$$

Notera att $1234_{\text{fem}} = 1 \cdot 5^3_{\text{tio}} + 2 \cdot 5^2_{\text{tio}} + 3 \cdot 5^1_{\text{tio}} + 4 = 194_{\text{tio}}$

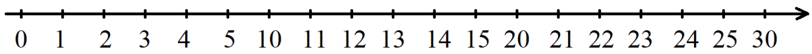
## Att räkna i basen sex

Jag ska nu visa hur vi kan räkna i en annan bas än tio utan att någon gång byta till basen tio. Vi kommer bara att räkna med naturliga tal, dvs inte med negativa heltal, bråk eller decimaltal, då det inte innebär något principiellt nytt när vi väl lärt oss räkna med naturliga tal i en annan bas. För att vara konkret ska jag räkna i basen sex, men allt jag gör kan direkt generaliseras till en godtycklig bas. Som regel kommer jag inte att skriva ut basen sex explicit, utan den antas vara underförstådd. Eftersom baser större än tio utgör en extra utmaning visar jag också ett exempel med basen F. Där det innebär extra svårigheter med baser större än tio har jag kommenterat detta. Att räkna på fingrarna i basen sex innebär att vi räknar som om vi bara har tre fingrar på varje hand.



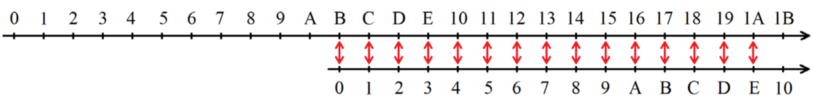
## *Ta hjälp av en tallinje*

Istället för att använda fingrar kan vi använda en tallinje i basen sex.




För att göra en enkel addition som $3+4$, startar vi på tallinjen i 3 och flyttar 4 steg till höger. Vi hamnar då på 11, vilket betyder att $3+4=11$. För att göra en enkel subtraktion som $12-5$, kan vi starta på tallinjen i 12 och flytta 5 steg till vänster. Vi hamnar då på 3, vilket innebär att $12-5=3$.

Räknar vi i en bas större än tio, till exempel i basen F, kan vi använda oss av två tallinjer som i figuren nedanför. I basen F finns följande siffror: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E. Talet F skrivs som 10 i basen F, på samma sätt som talet tio skrivs som 10 i basen tio. För att göra additionen B + E i basen F, flyttar vi E steg från B längs den övre tallinjen. Den undre tallinjen använder vi oss av för att hålla reda på hur många steg vi har flyttat längs den övre tallinjen. För varje steg vi flyttar på den övre tallinjen, flyttar vi ett steg till höger från nollan på den undre tallinjen. När vi kommit till E på den undre tallinjen, läser vi av B + E på den övre tallinjen. Det gäller alltså att B + E = 1A i basen F.




## *Ta hjälp av 10-kamrater*

Ett annat sätt att göra enkla additioner och subtraktioner är att använda sig av 10-kamrater. I alla baser finns det vissa par av siffror som blir lika med basen när det adderas och som därför skrivs som skrivs 10. Exempelvis i basen sex har vi följande 10-kamrater:

$$1+5=2+4=3+3=10$$

Nedanför ges ett par exempel på hur vi kan gå via 10 för att göra enkla uträkningar, där vi använder oss av att addition är både kommutativt och associativt. Observera att uträkningarna görs i basen sex:

$$3+4=3+\underbrace{(3+1)}_{=4}=\underbrace{(3+3)}+1=10+1=11$$

$$5+3+4=5+\underbrace{(1+2)}_{=3}+4=\underbrace{(5+1)}_{=10}+\underbrace{(2+4)}=10+10=20$$

$$14+5=14+\underbrace{(2+3)}_{=5}=\underbrace{(14+2)}+3=20+3=23$$

Notera att vi i andra raden gjorde uträkningen $10+10=20$ genom att addera ettorna och lägga på en nolla på slutet. Så gör vi i bas tio och det fungerar för alla baser. Exempelvis i basen sex så är:

$$20+30=50 \quad \text{eftersom} \quad 2+3=5$$
$$400+500=1300 \quad \text{eftersom} \quad 4+5=13$$

Följande uträkning visar varför det fungerar i alla baser:

$$
\begin{aligned}
400+500 &= (4\cdot10^2+0\cdot10^1+0)+(5\cdot10^2+0\cdot10^1+0)\\
&= 4\cdot10^2+5\cdot10^2\\
&= (4+5)\cdot10^2\\
&= 13\cdot10^2\\
&= (1\cdot10^1+3)\cdot10^2\\
&= 1\cdot10^1\cdot10^2+3\cdot10^2\\
&= 1\cdot10^{1+2}+3\cdot10^2\\
&= 1\cdot10^3+3\cdot10^2\\
&= 1\cdot10^3+3\cdot10^2+0\cdot10^1+0\\
&= 1300
\end{aligned}
$$

## *Multiplikation som upprepad addition*

Multiplikation kan definieras som upprepad addition, så när vi kan addera tal kan vi även multiplicera tal. Exempelvis kan vi räkna ut enklare multiplikationer på följande vis:

$$3\cdot5 = \underbrace{(5+5)}+5=14+5=23$$

Notera att det därmed också gäller till exempel att:

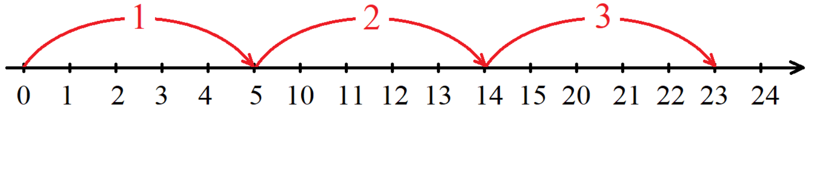
$$3\cdot50=230 \qquad 30\cdot50=2300 \qquad 30\cdot500=23000$$

I alla de tre uträkningarna har multiplikationen $3\cdot5$ beräknats som ovan och därefter har vi lagt på lika många nollor på slutet som det finns i faktorerna. Så gör vi i basen tio och det fungerar för alla baser, vilket följande uträkning i basen sex visar:

$$
\begin{aligned}
30\cdot500 &= (3\cdot10^1+0)\cdot(5\cdot10^2+0\cdot10^1+0)\\
&= 3\cdot5\cdot10^1 10^2\\
&= 23\cdot10^{1+2}\\
&= 23\cdot10^3\\
&= (2\cdot10^1+3)\cdot10^3\\
&= 2\cdot10^1\cdot10^3+3\cdot10^3\\
&= 2\cdot10^{1+3}+3\cdot10^3\\
&= 2\cdot10^4+3\cdot10^3\\
&= 2\cdot10^4+3\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10^1+0\\
&= 23000
\end{aligned}
$$

Hela uträkningen bygger på kunskapen att $3\cdot5=23$ i basen sex, och att varje multiplikation med 10 gör talet 10 gånger större vilket markeras med att alla siffror flyttas en position åt vänster och en nolla läggs till i entalspositionen.

Division kan definieras utifrån multiplikation, så när vi kan multiplicera kan vi även dividera. Jag ska nu visa hur vi räknar ut en enkel division som 23 / 5 i basen sex. Per definition är 23 / 5 det tal vi ska multiplicera 5 med för att få 23. Stegar vi oss fram på tallinjen från 0 med steglängden 5, hamnar vi efter 3 steg på 23, vilket innebär att 23 / 5 = 3.



## *Multiplikation och division med 10*

Även multiplikationer och divisioner kan ofta utföras med hjälp av multiplikativa 10-kamrater, som i basen tio ges av $2 \cdot 5 = 10$. I basen tio kan vi till exempel räkna ut $5 \cdot 18$ genom att multiplicera ena faktorn med 2 och dividera den andra med 2 för att åstadkomma en multiplikation med 10:

$$5 \cdot 18 = (5 \cdot 2) \cdot (18/2) = 10 \cdot 9 = 90$$

Samma knep kan vi använda i andra baser. I basen sex ges de multiplikativa 10-kamraterna av $2 \cdot 3 = 10$. Ett exempel av samma typ i basen sex är:

$$3 \cdot 14 = (3 \cdot 2) \cdot (14/2) = 10 \cdot 5 = 50$$

Här kan vi beräkna $14/2$ som i exemplet $23/5$ ovanför, det vill säga genom att stega oss fram på tallinjen. Eller så har vi gjort det många gånger tidigare och hämtar istället från minnet att $14/2 = 5$, på samma sätt som du antagligen gjorde i basen tio när du visste att $18/2 = 9$. Ska vi göra många beräkningar eller räkna med stora tal blir det ineffektivt att hela tiden använda en tallinje eller räkna på fingrarna. Då är det bättre att istället lära sig alla ensiffriga additioner och multiplikationer utantill. I basen sex innebär det att lära sig additions- och multiplikationstabellen i basen sex utantill. Tabellerna nedanför kommer vi fram till genom att räkna som vi har gjort ovan.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 4 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 5 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

| · | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 2 | 4 | 10 | 12 | 14 |
| 3 | 3 | 10 | 13 | 20 | 23 |
| 4 | 4 | 12 | 20 | 24 | 32 |
| 5 | 5 | 14 | 23 | 32 | 41 |

## *Beräkningar med algoritmer*

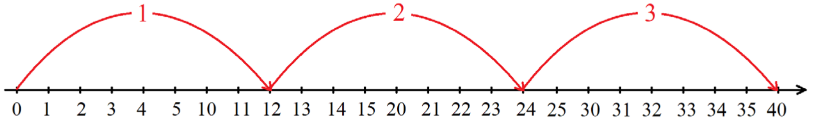
Beräkningar med större tal i de fyra räknesätten kan vi göra med de vanliga algoritmerna på samma sätt som i basen tio. Dessa är generella metoder som fun-gerar oavsett bas. Vi tittar till exempel på följande beräkningar i basen sex:

$$3012 + 4354 \qquad 5241 - 3452 \qquad 214 \cdot 532 \qquad 3240/12$$

Det enda nya vi behöver tänka på är att vi ska göra alla beräkningar i basen sex istället för i basen tio. Ska vi göra det effektivt och utan att fuska behöver vi använda både en tallinje och additions- och multiplikationstabellerna ovanför. Det är frestande att fuska i delberäkningarna, men vi bör tvinga oss själva att inte göra det, för annars tränar vi inte optimalt på att räkna i en annan bas. Vi nöjer oss med att ge exempel på algoritmerna utan förklaringar, se nästa uppslag.

I subtraktionsalgoritmen behöver vi göra uträkningar av typen $13-5$. Vi kan använda tallinjen, men vi kan också använda additionstabellen. Tittar vi i raden där det står 5 längst till vänster, letar upp 13 i tabellen på den raden och går rakt upp från 13, så ser vi att det överst i den kolumnen står 4, vilket betyder att $13-5=4$ eftersom $4+5=13$.

I divisionsalgoritmen behöver vi multiplicera 12 med olika tal. Till exempel behöver vi ta reda på hur många gånger 12 går i 32. Prövar vi oss fram finner vi att $2\cdot 12=24$ och $3\cdot 12=40$. Av det inser vi att första siffran i svaret ska vara en tvåa. Multiplikationer som $2\cdot 12$ och $3\cdot 12$ kan vi beräkna genom att hoppa på tallinjen:




Alternativt kan vi använda räkneregler för att göra delberäkningar:

$$2\cdot 12=2\cdot(10+2)=2\cdot 10+2\cdot 2=20+4=24$$

För större delberäkningar behöver vi använda oss av multiplikationsalgoritmen. Här under ser du hur algoritmerna i basen sex ser ut.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;1\;\;} \\ 3012 \\ +\,4354 \\ \hline 11410 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 10\,10\,10} \\ \cancel{5}\cancel{2}\cancel{4}1 \\ -\,3452 \\ \hline 1345 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 214 \\ \cdot\,532 \\ \hline {\scriptstyle 1}\,432 \\ {\scriptstyle 1}\,1050\phantom{0} \\ +1522\phantom{00} \\ \hline 203532 \end{array} \;\; {\scriptstyle \cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{1}} \qquad \begin{array}{r} 0233 \\ 12\overline{)3240} \\ -0\phantom{000} \\ \hline 32\phantom{00} \\ -24\phantom{00} \\ \hline 44\phantom{0} \\ -40\phantom{0} \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

## Avslutande kommentarer

Vi avslutar denna artikel med att se fler exempel på matematik som rör räkning i andra baser än tio. Dels för att få en fördjupad förståelse för matematiken, dels för att inse att sådant vi tar för givet inte alltid är så självklart, vilket kan ge oss en bättre förståelse för den situation elever befinner sig i när de lär sig matematik.

- Minnesreglerna att lägga på nollor på slutet, flytta decimaltecknet och stryka nollor gäller i alla baser.

  Exempelvis gäller att: $1{,}2345\cdot 1000=1234{,}5$

  $12345\cdot 0{,}001=12{,}345$

  På nästa sida är dessa minnesregler beskrivna på ett generellt sätt och gäller i en godtycklig bas.

$$0{,}\underbrace{0\ldots001}_{m\ st}\cdot 0{,}\underbrace{0\ldots001}_{n\ st}=0{,}\underbrace{0\ldots001}_{m\ +\ n} \qquad 1\underbrace{00\ldots00}_{m\ st}\cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{n\ st}=1\underbrace{00\ldots00}_{m\ +\ n}$$

$$\frac{1\overbrace{00\ldots00}^{m\ st}}{1\underbrace{00\ldots00}_{n\ st}}=1\underbrace{00\ldots00}_{m\ -\ n} \qquad \frac{0{,}\overbrace{0\ldots001}^{m\ st}}{0{,}\underbrace{0\ldots001}_{n\ st}}=0{,}\underbrace{0\ldots001}_{m\ -\ n}$$

$$a\cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{m\ st}=a\underbrace{00\ldots00}_{m\ st} \qquad a\cdot 0{,}\underbrace{0\ldots001}_{m\ st}=0{,}\underbrace{0\ldots00a}_{m\ st}$$

- Det är lätt att få för sig att det är något speciellt med ett bråk som $1/3=0{,}333\ldots$ då den på decimalform har oändligt många decimaler. Jämför det med bråket $1/2=0{,}5$ som har ett ändligt antal decimaler på decimalform. Men räknar vi istället i basen 3 är $1/3=0{,}1$ medan $1/2=0{,}111\ldots$ I basen 3 är det alltså istället 1/2 som har oändligt många decimaler och 1/3 som har ett ändligt antal decimaler.
- I basen sex gäller att en halv skrivs 0,3 och som procent 30 % eftersom $30+30=100$. Där pratar vi alltså inte om sannolikheten ”femti-femti” utan ”tretti-tretti” vid lika utfall. Sannolikheten för varje utfall på en vanlig sexsidig tärning är i basen sex 10 % eftersom 10% betyder 10 på 100 eller 1 på 10, alltså en på sex. Och om prefixet deci även i basen sex får betyda $1/10_{sex}$ är en halv meter 3 dm.
- I basen tio är ett tal delbart med 5 om och endast om talets sista siffra är 0 eller 5. På motsvarande sätt gäller i basen sex att ett tal är delbart med 3 om och endast om talets sista siffra är 0 eller 3. Däremot finns det exempelvis i basen sju inte någon motsvarande minnesregel eftersom 7 är ett udda tal.
- Det finns också sådant som inte är beroende av i vilken bas vi räknar. Exempelvis räkneregler som den kommutativa lagen: $a\cdot b=b\cdot a$ och den distributiva lagen: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, eller egenskapen att vara ett primtal eller ett irrationellt tal. Talet 7 är ett primtal oavsett vilken bas vi räknar i, och talet $\pi$ har en oändlig icke-periodisk decimalsekvens oavsett i vilken bas vi räknar (men för andra baser än tio är decimalsekvensen något annat än 3,1415…).

Om du som lärare eller lärarstudent räknar en stund i basen sex utan att fuska, så kan du ana hur elever upplever sitt första möte med att räkna i tiobassystemet. Du känner vad som är svårt och vilka hjälpmedel som underlättar.

Det är viktig att elever får en förståelse för positionssystemets uppbyggnad, förstår vitsen med att omgruppera, speciellt i grupper av basens antal, och tack vare det kunna räkna med hjälp av ental i algoritmerna. I denna process är både gruppering och tallinjen användbara tankemodeller. Automatisering av tabellkunskaper underlättar räknandet i algoritmer, liksom förståelse för 10-kamraterna och för multiplikation och division med 10.

## LITTERATUR

Nystedt, L. (1991). *Rapport från sexfingerlandet.* Nämnaren 1991:2.